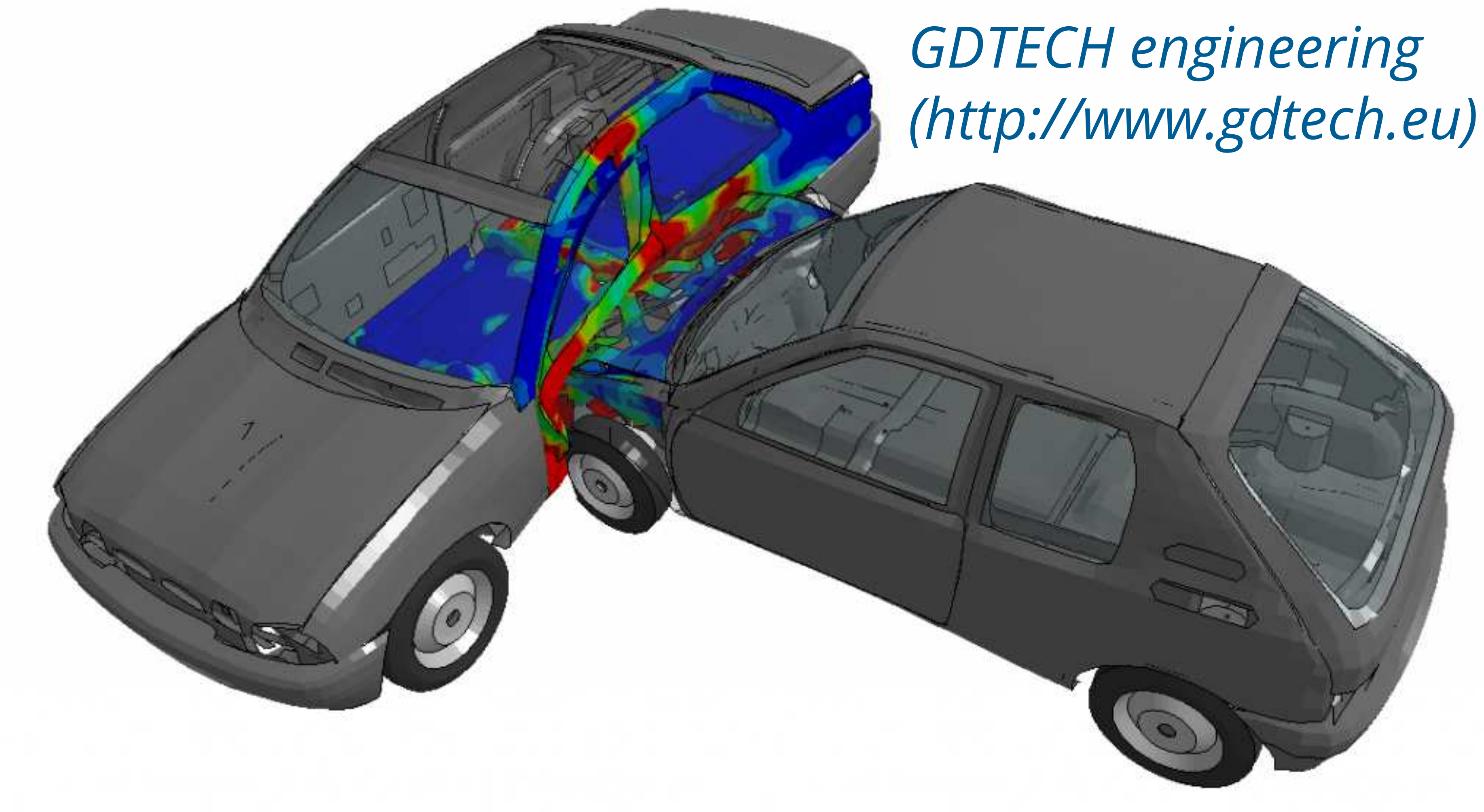
Maillages hex-dominants : génération, simulation et évaluation

Maxence Reberol

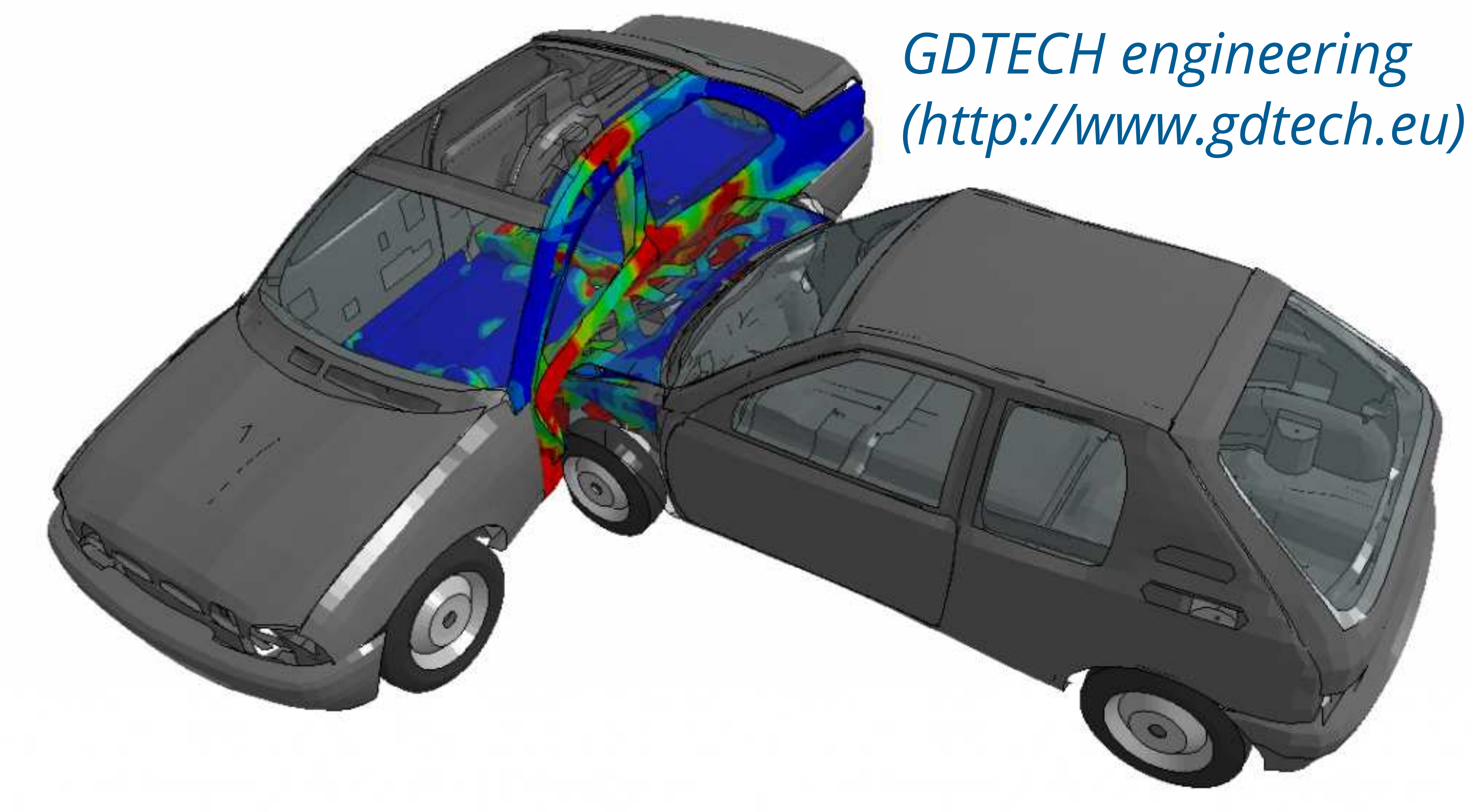
23 mars 2018, Nancy

Directeurs de thèse:

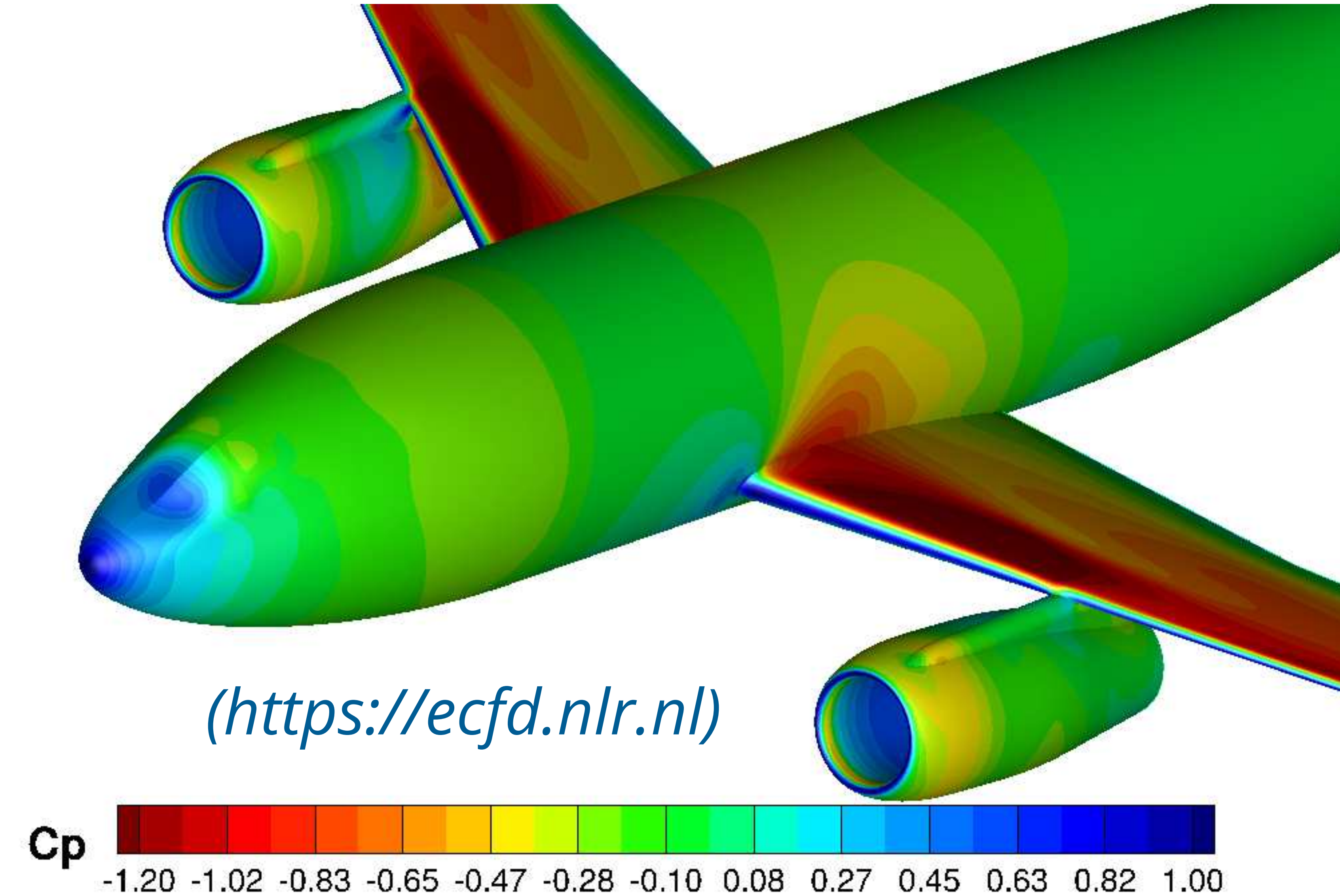
- Bruno Lévy
- Sylvain Lefebvre



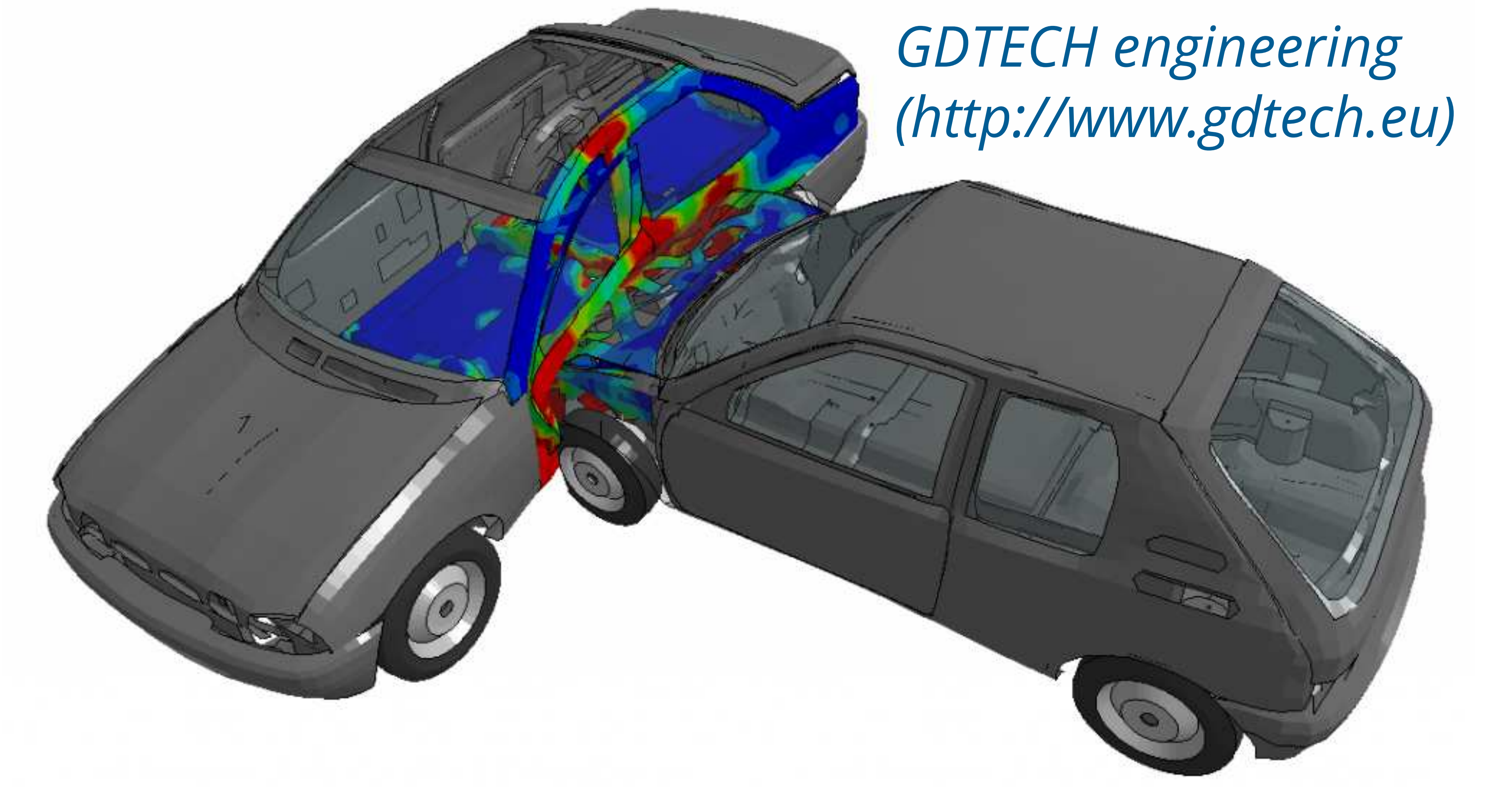
GDTECH engineering
(http://www.gdtech.eu)

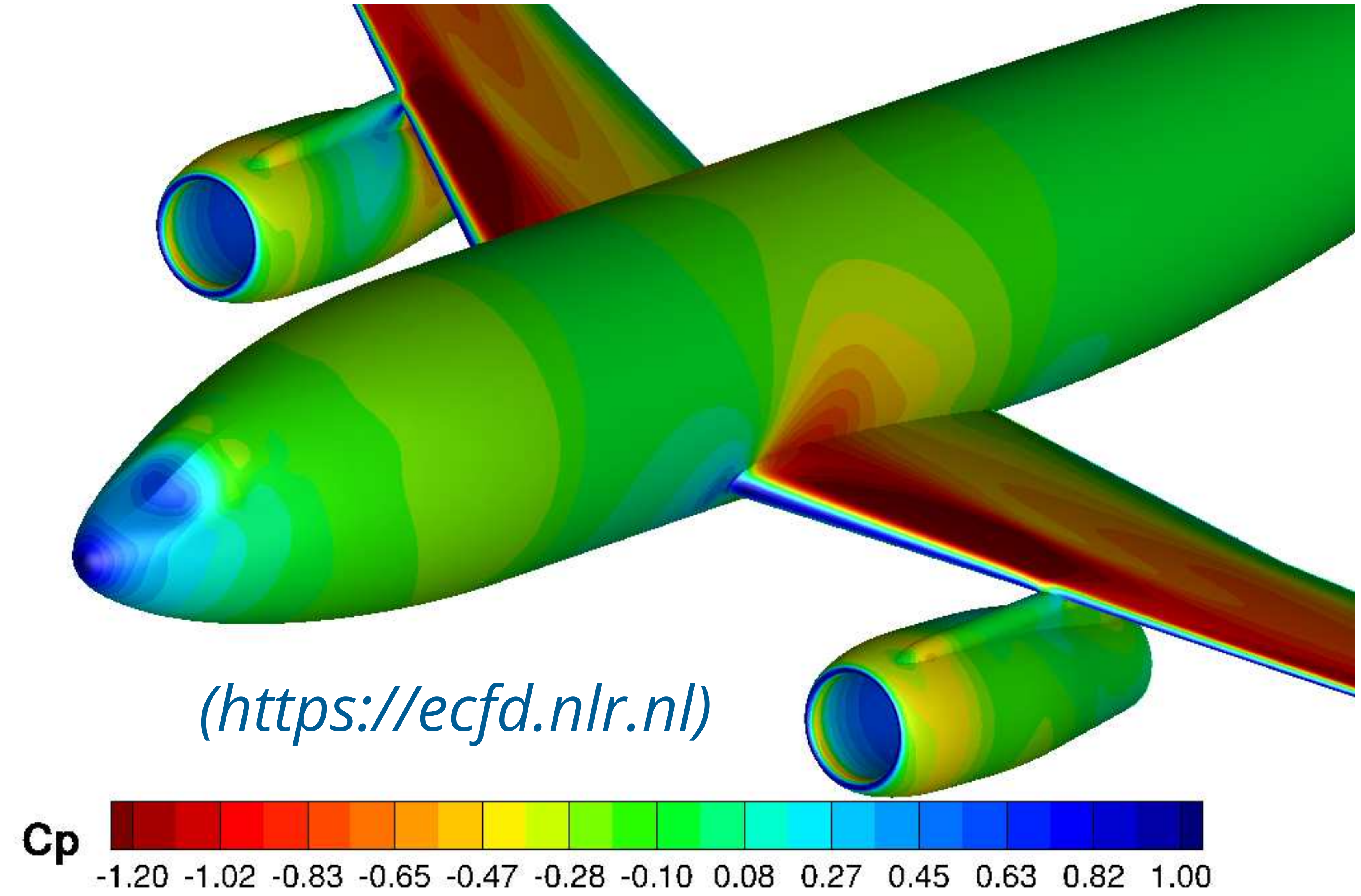


GDTECH engineering (http://www.gdtech.eu)

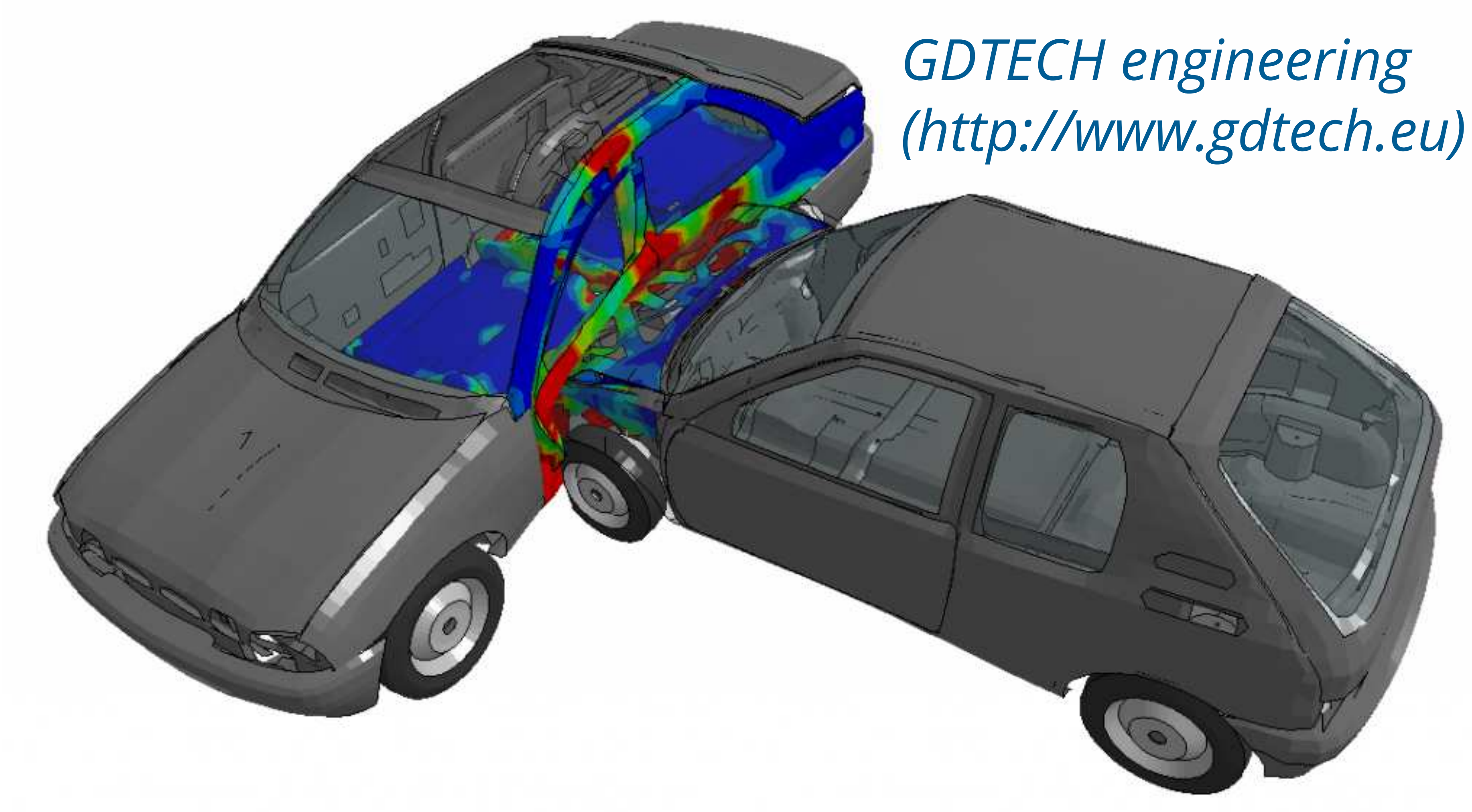


(https://ecfd.nlr.nl)

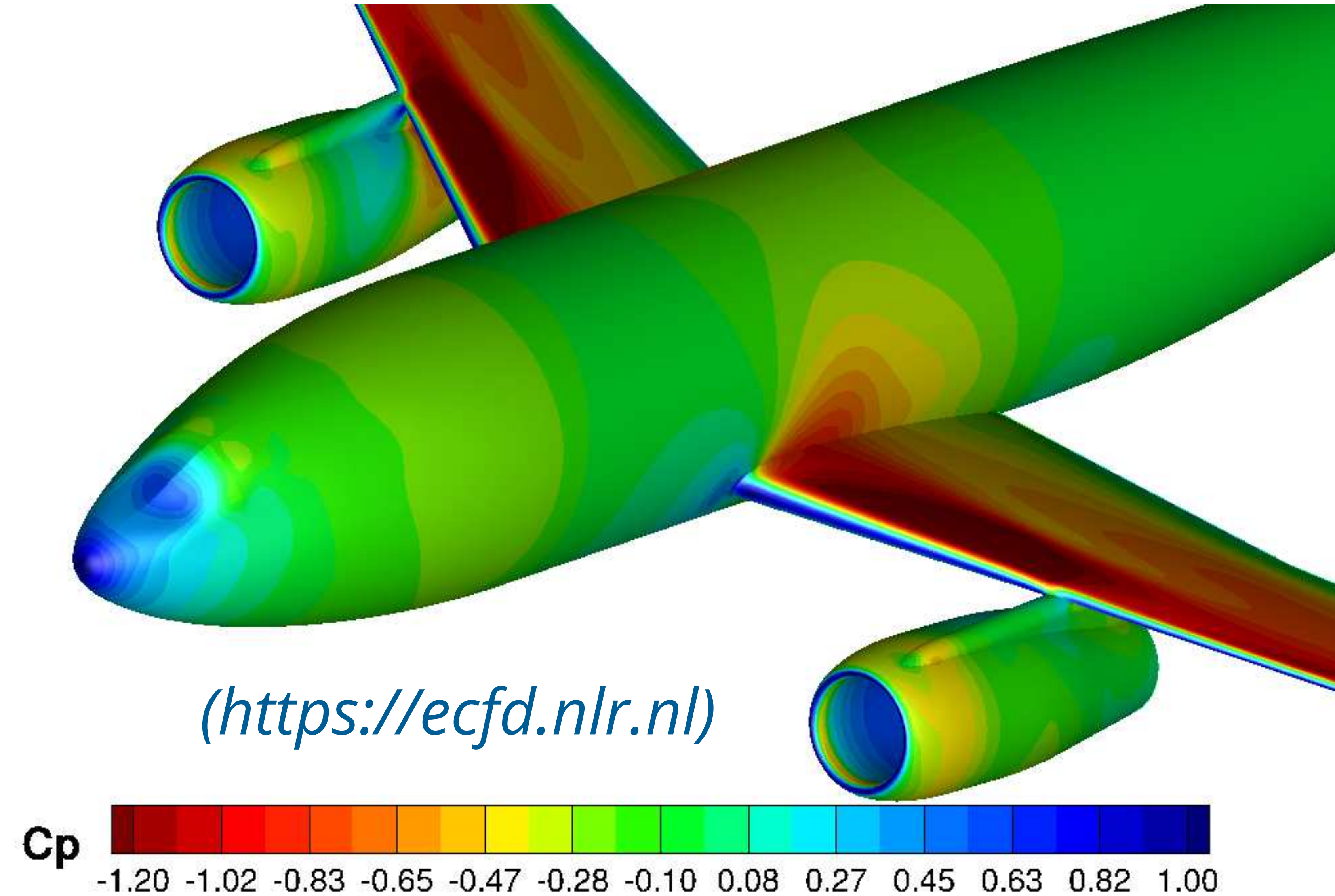




Simulation numérique :
- outil pour ingénieurs (nombreux logiciels commerciaux)
- tous les domaines : mécanique, fluide, chaleur, électromagnétisme, acoustique
- fondamental pour le conception de systèmes complexes



GDTECH engineering (http://www.gdtech.eu)

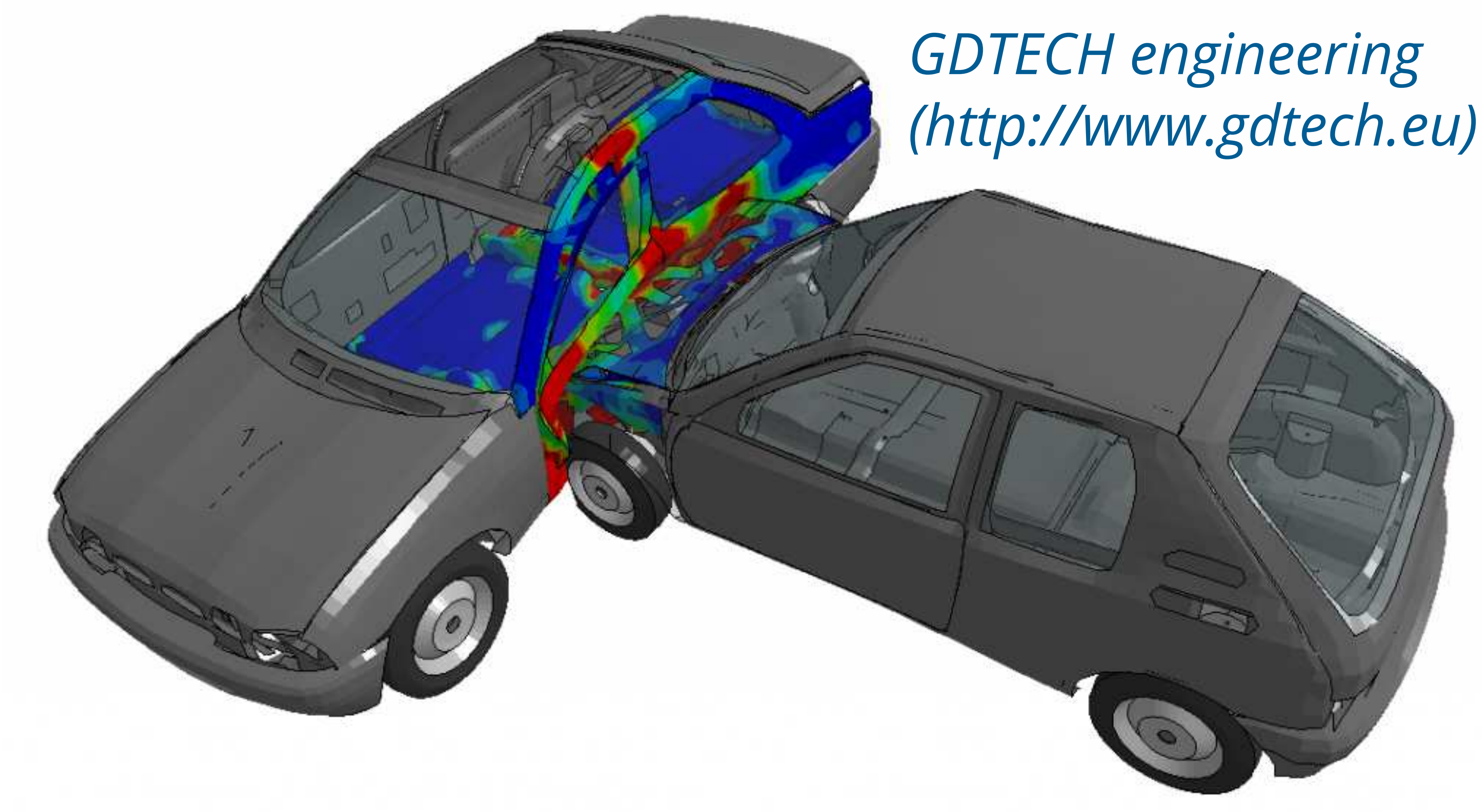


(https://ecfd.nlr.nl)

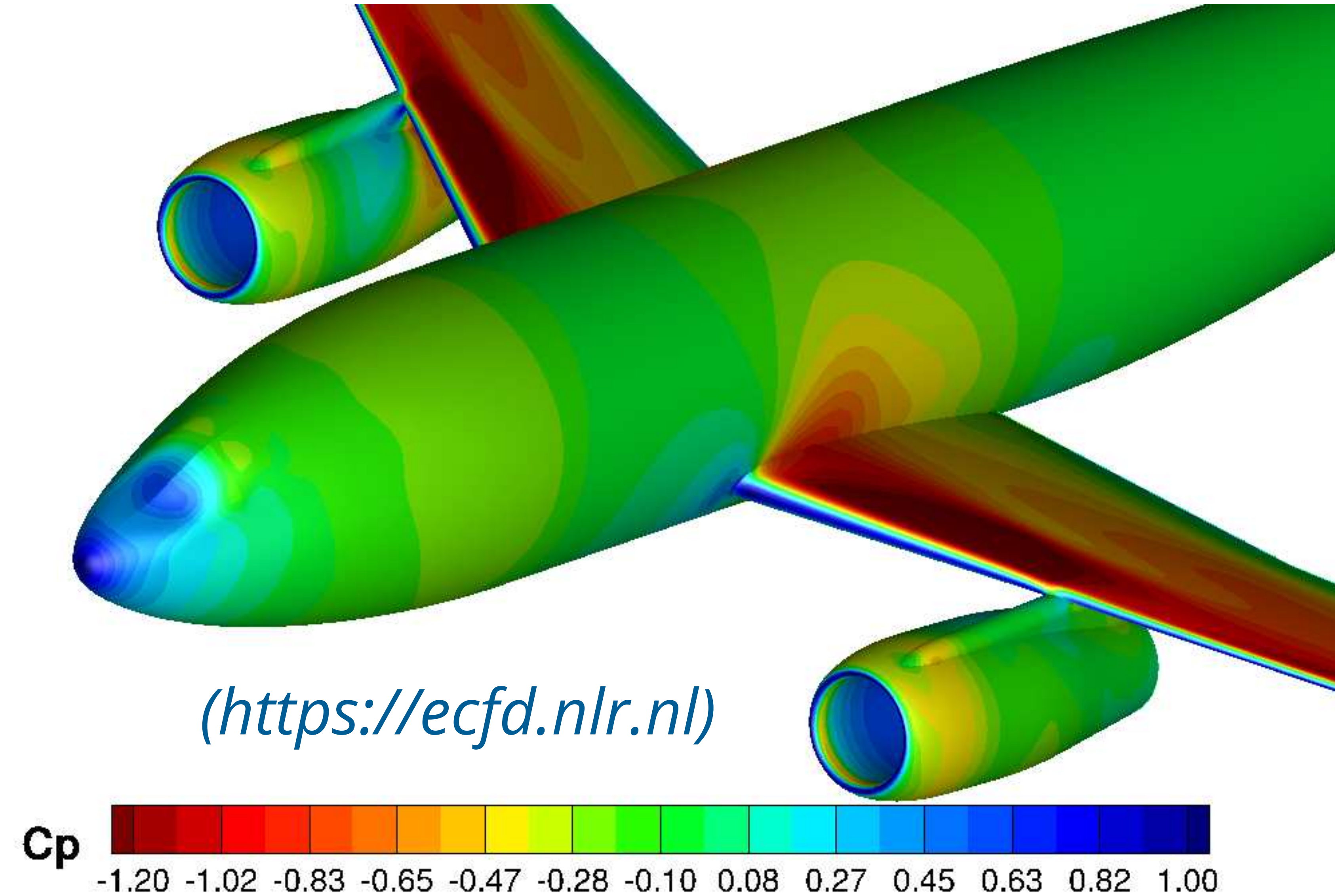
Simulation numérique :

- outil pour ingénieurs (nombreux logiciels commerciaux)
- tous les domaines : mécanique, fluide, chaleur, électromagnétisme, acoustique
- fondamental pour le conception de systèmes complexes

Modélisation (mise en équations) → Résolution numérique du problème → Interprétation des résultats



GDTECH engineering (http://www.gdtech.eu)



Simulation numérique :

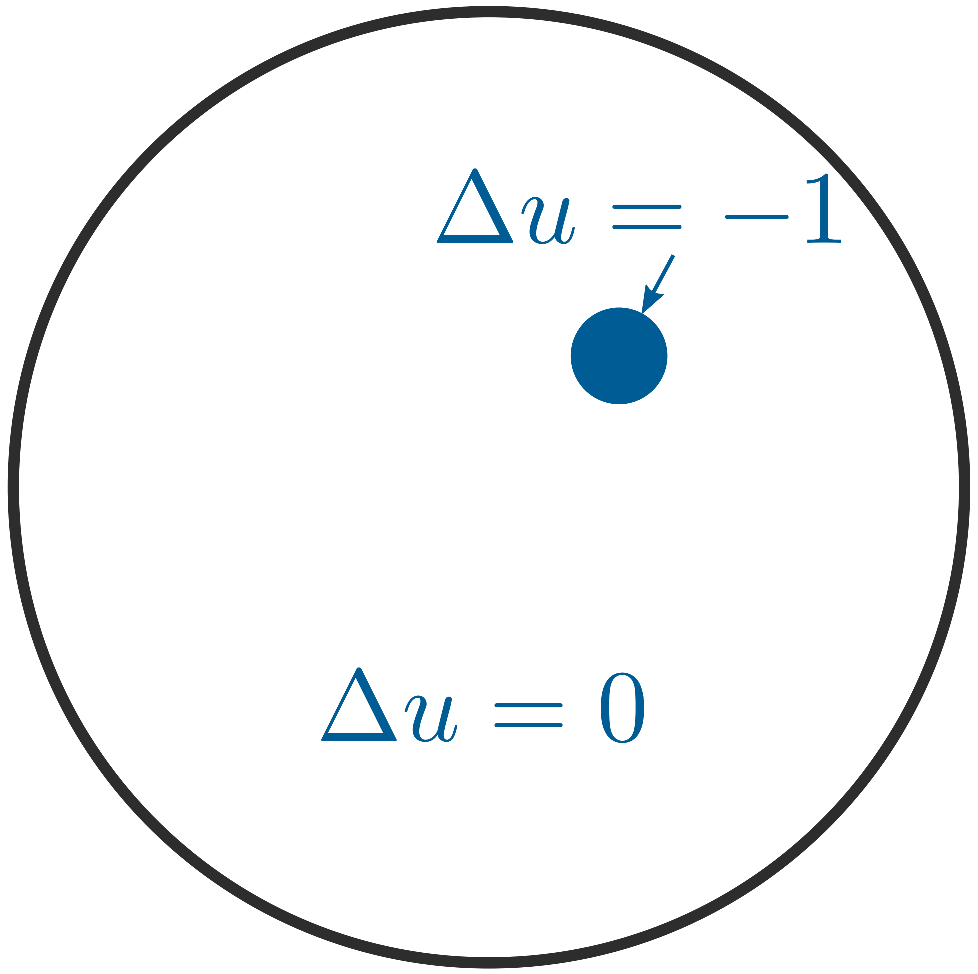
- outil pour ingénieurs (nombreux logiciels commerciaux)
- tous les domaines : mécanique, fluide, chaleur, électromagnétisme, acoustique
- fondamental pour le conception de systèmes complexes

Modélisation (mise en équations) → **Résolution numérique du problème** → Interprétation des résultats

Objectif : résoudre numériquement des problèmes aux limites

Problème aux limites :

- équations aux dérivées partielles (EDPs) définies sur un domaine

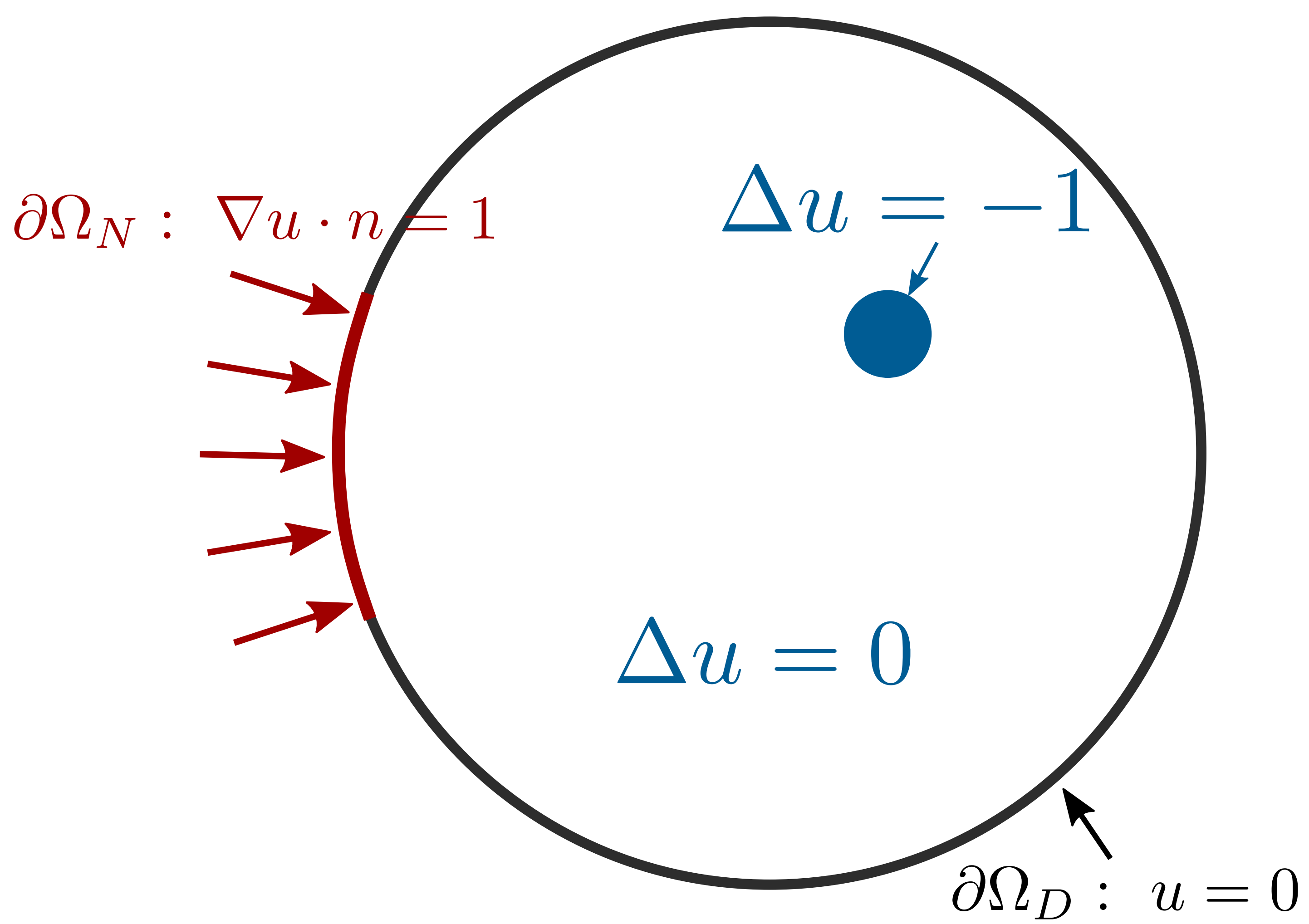


Objectif : résoudre numériquement des problèmes aux limites

Problème aux limites :

- équations aux dérivées partielles (EDPs) définies sur un domaine

- conditions aux limites sur le bord du domaine

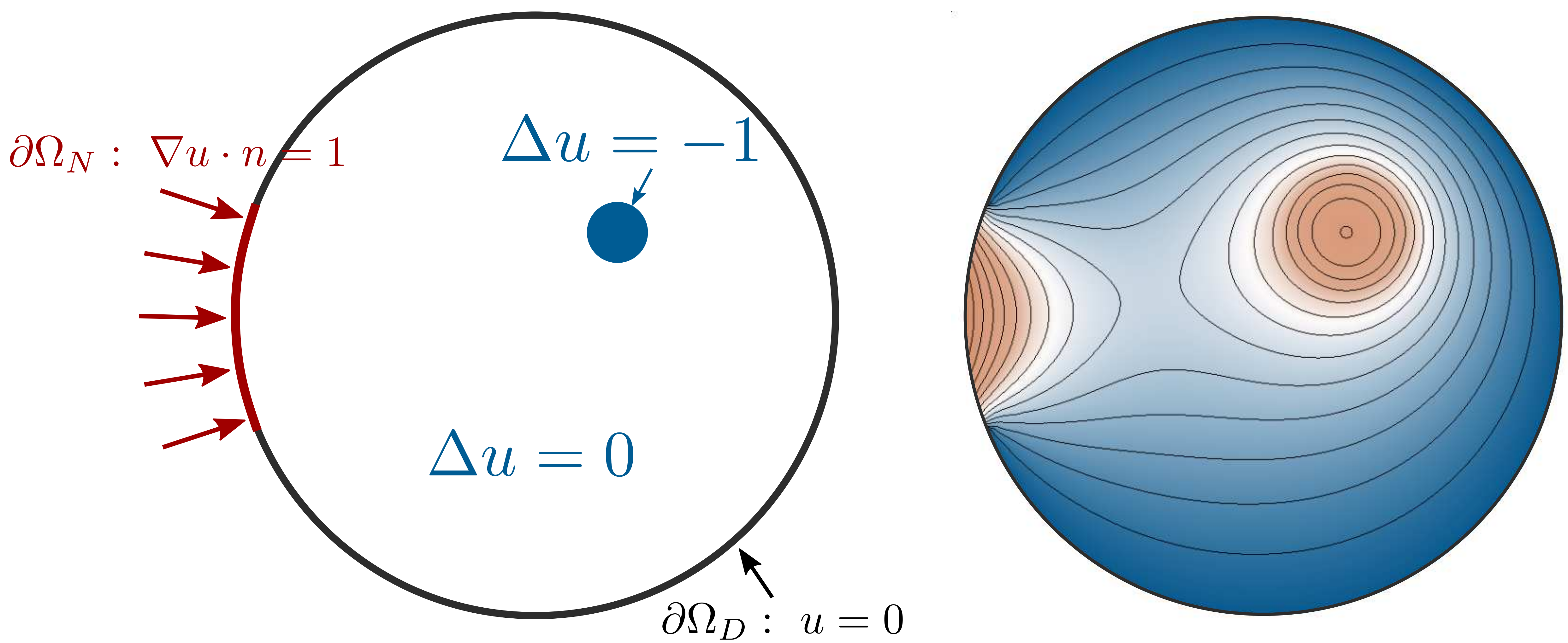


Objectif : résoudre numériquement des problèmes aux limites

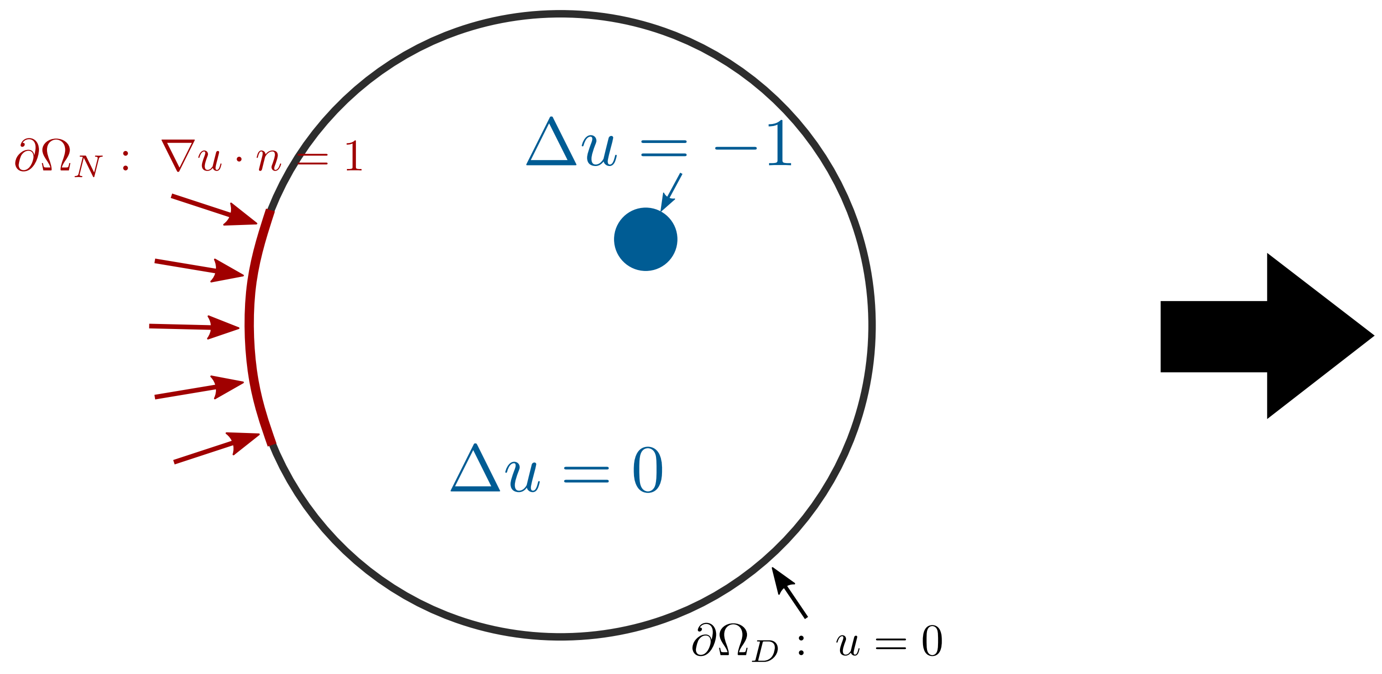
Problème aux limites :

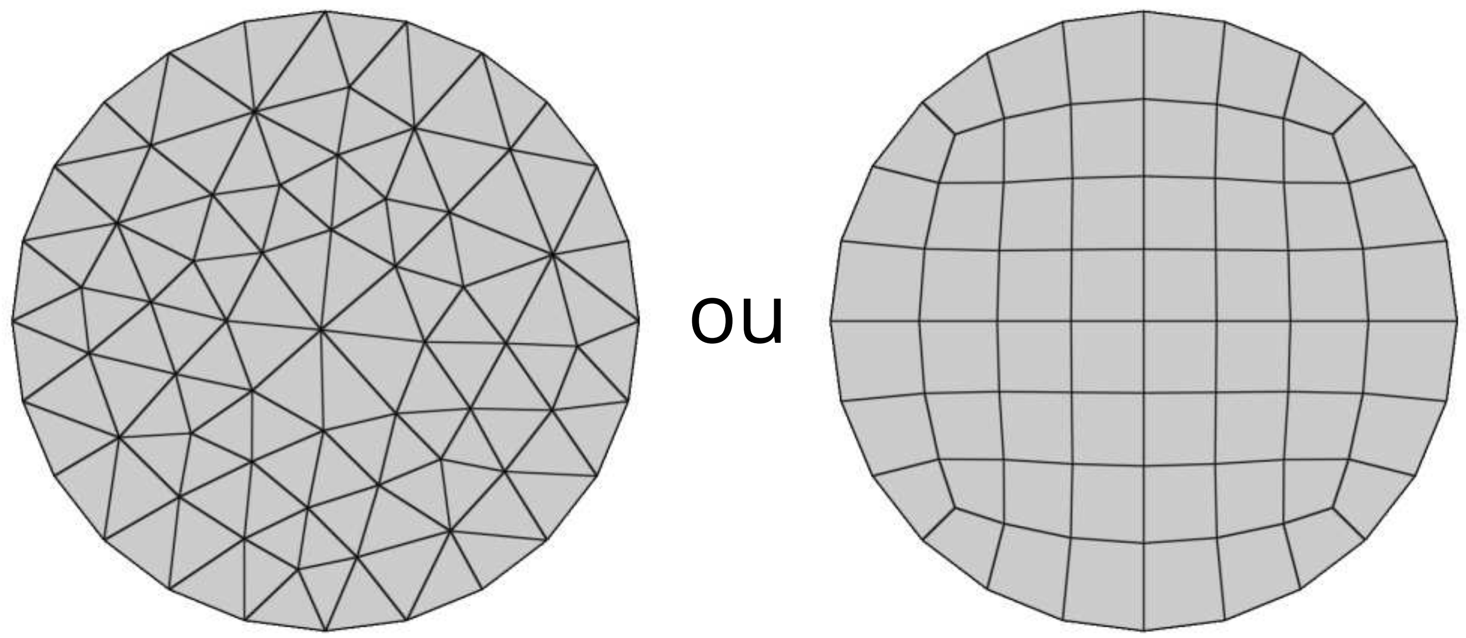
- équations aux dérivées partielles (EDPs) définies sur un domaine

- conditions aux limites sur le bord du domaine

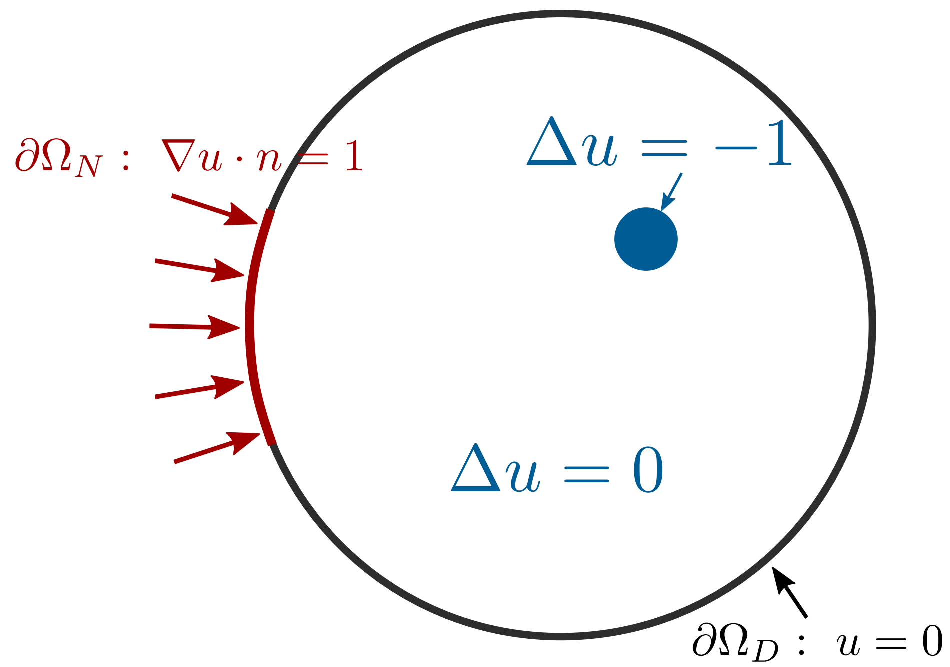


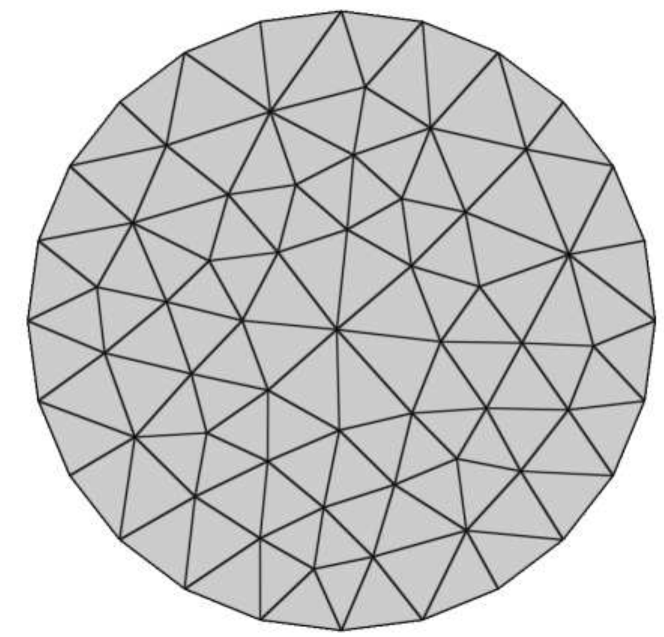
Maillage : partition du domaine en éléments simples



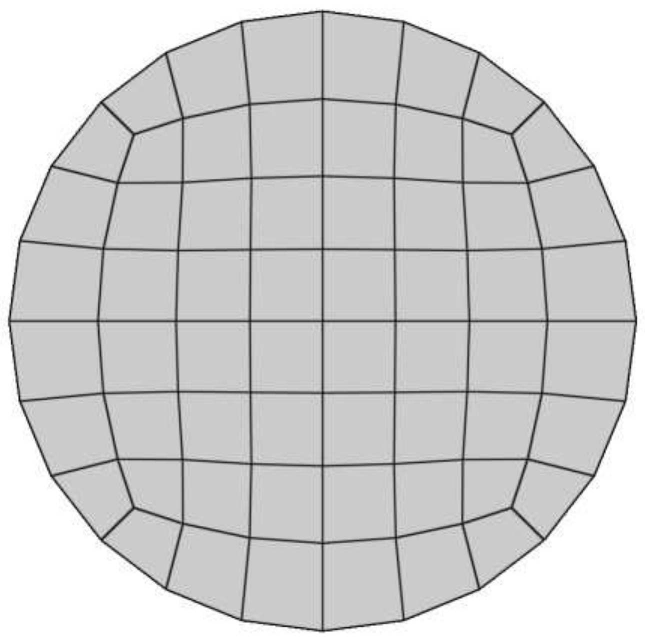


Maillage : partition du domaine en éléments simples

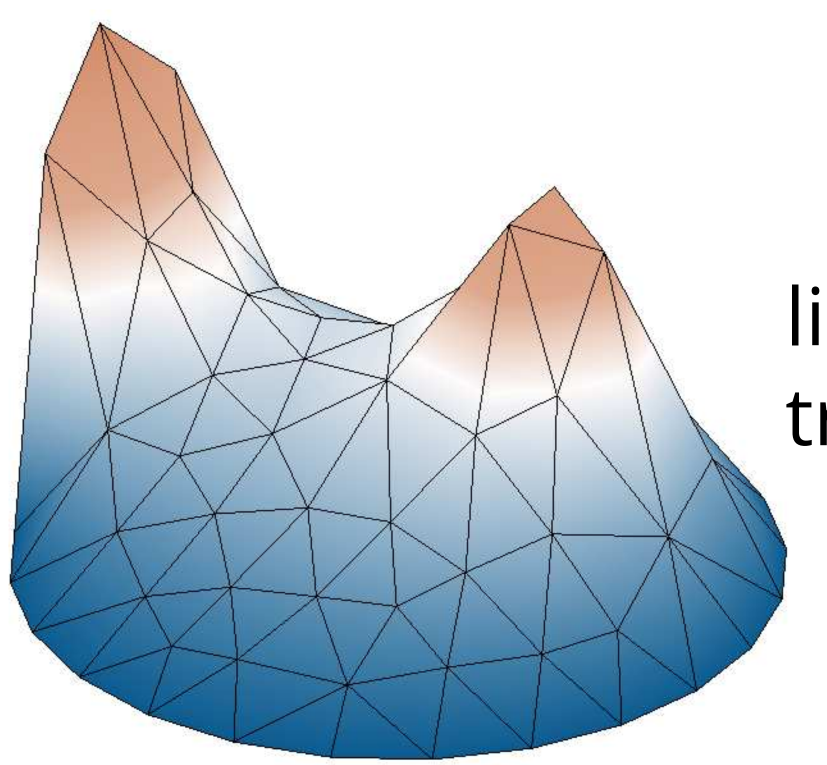




ou

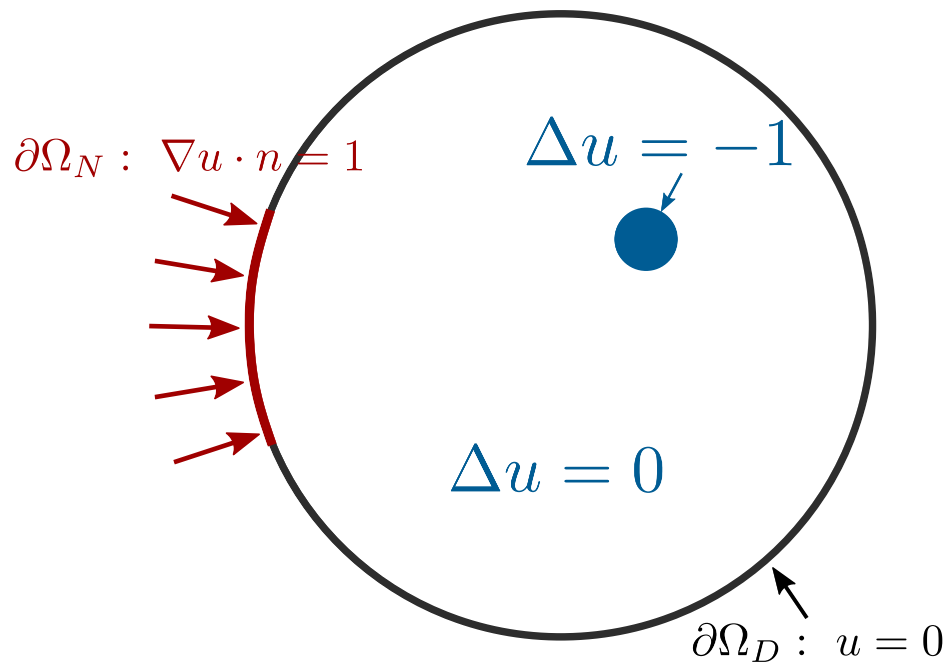


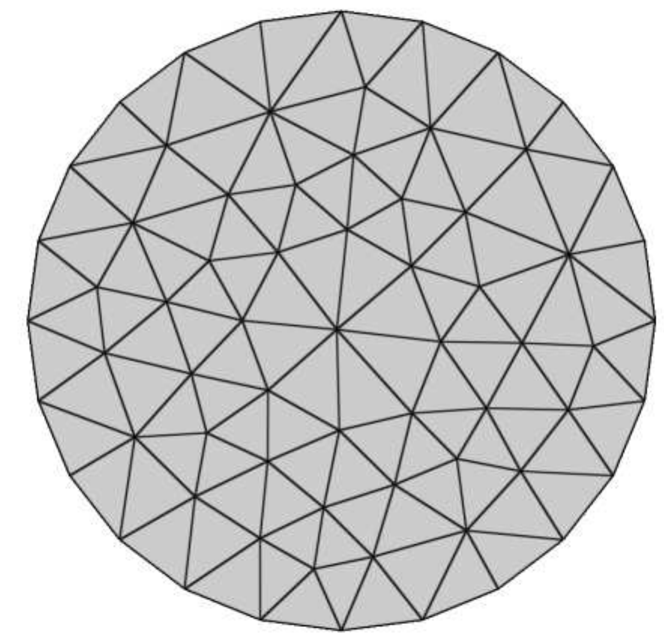
Approximation des fonctions : polynômes par morceaux sur les éléments



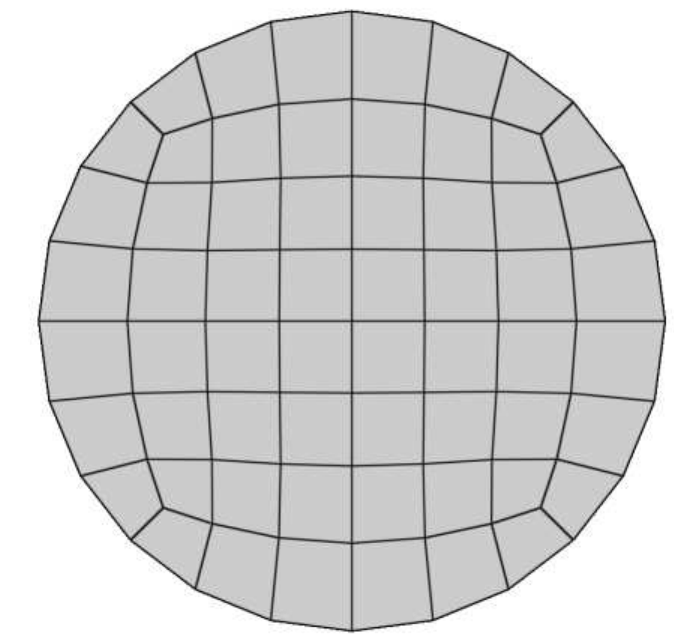
linéaire par triangle ($\mathbb{P}_1$)

Maillage : partition du domaine en éléments simples

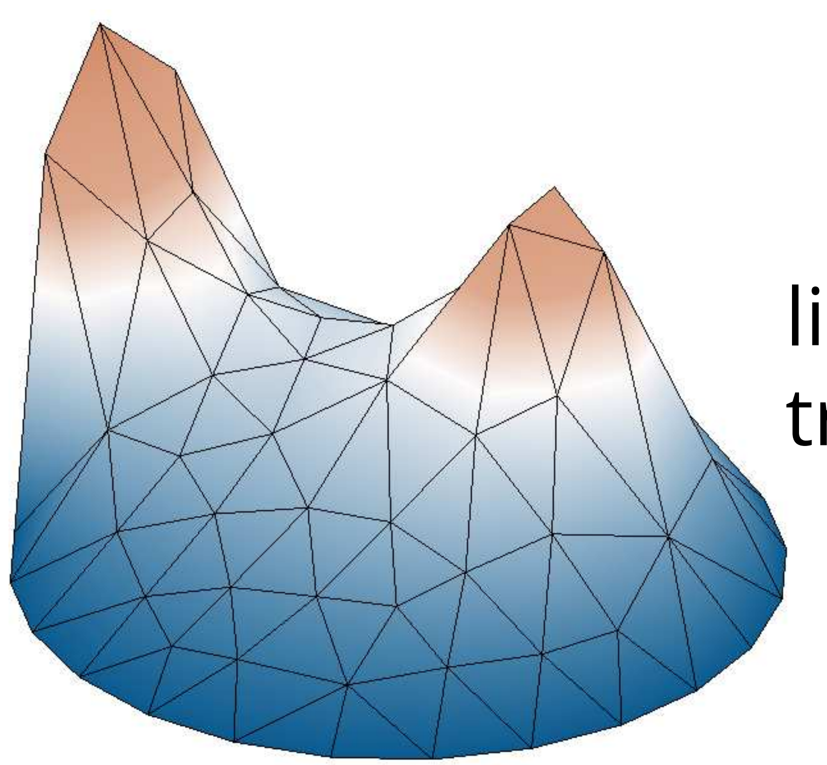




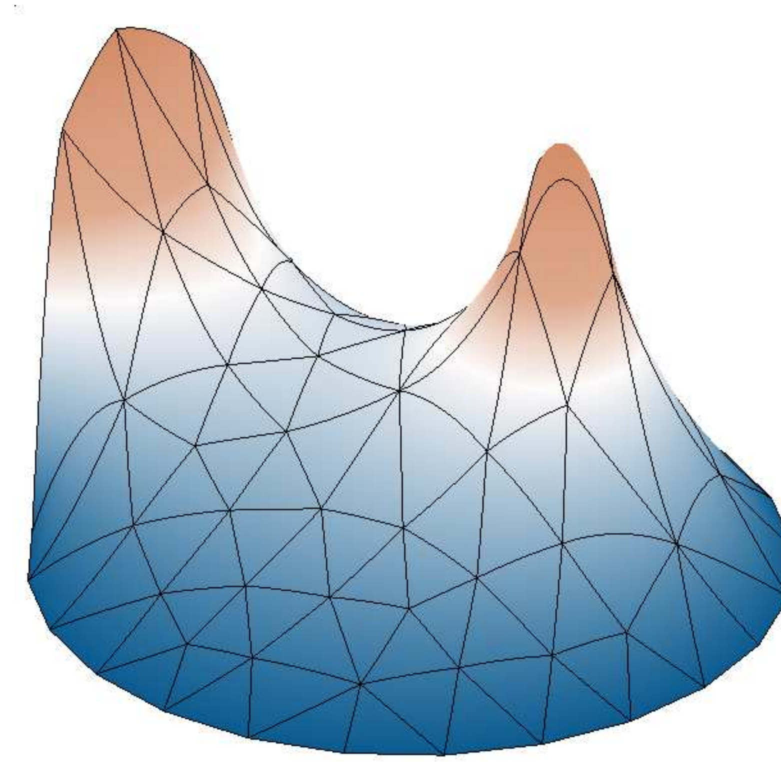
ou



Approximation des fonctions : polynômes par morceaux sur les éléments

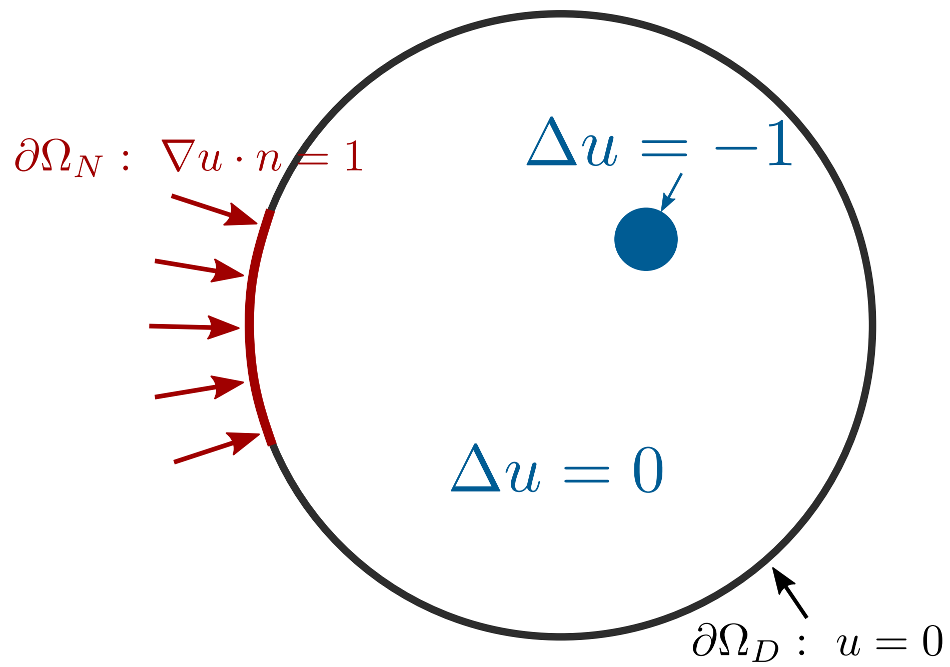


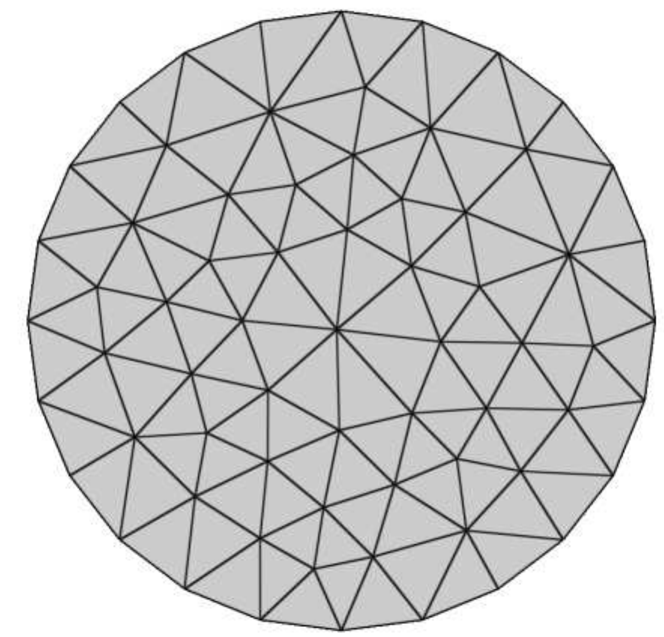
linéaire par triangle ($\mathbb{P}_1$)



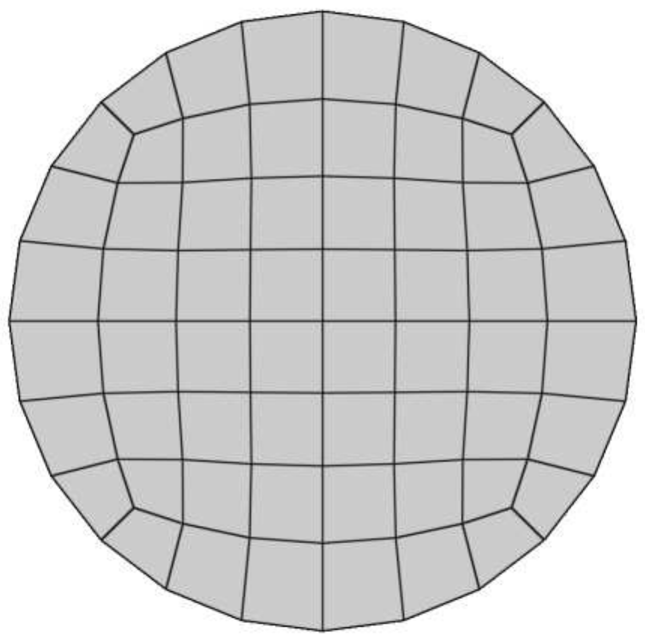
quadratique par triangle ($\mathbb{P}_2$)

Maillage : partition du domaine en éléments simples

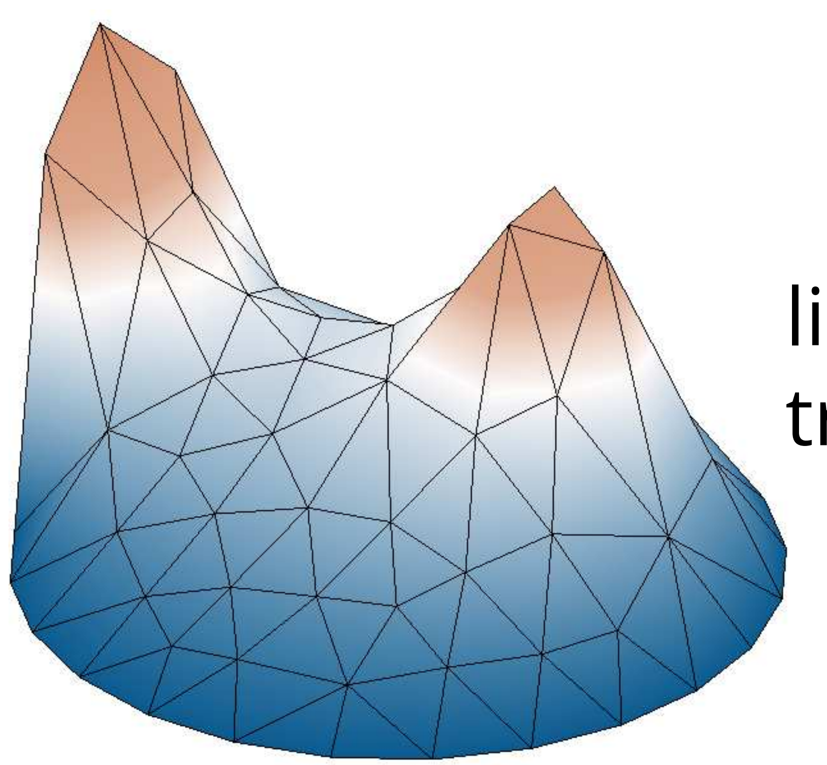




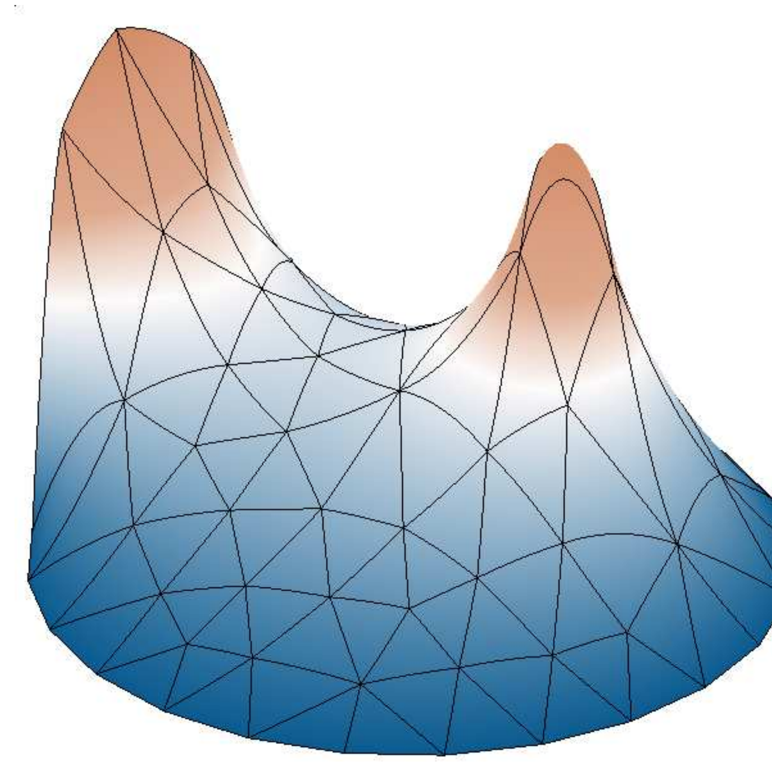
ou



Approximation des fonctions : polynômes par morceaux sur les éléments



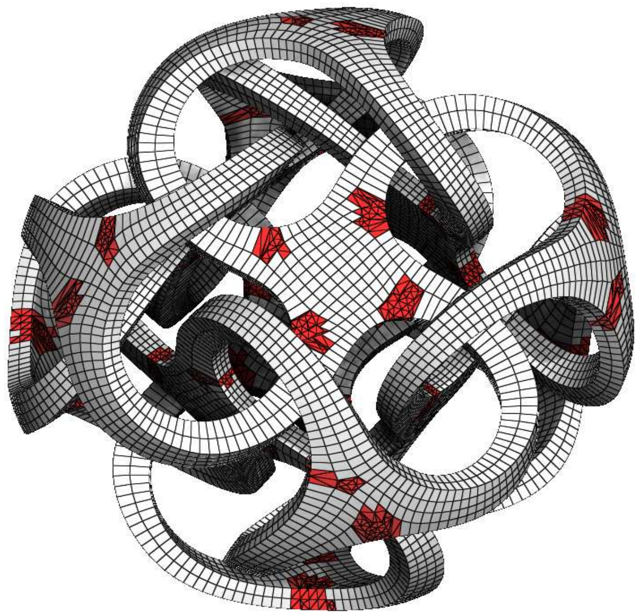
linéaire par triangle ($\mathbb{P}_1$)



quadratique par triangle ($\mathbb{P}_2$)

Historique : débuts années 50, théorie années 70, ... , toujours très utilisé

Sommaire

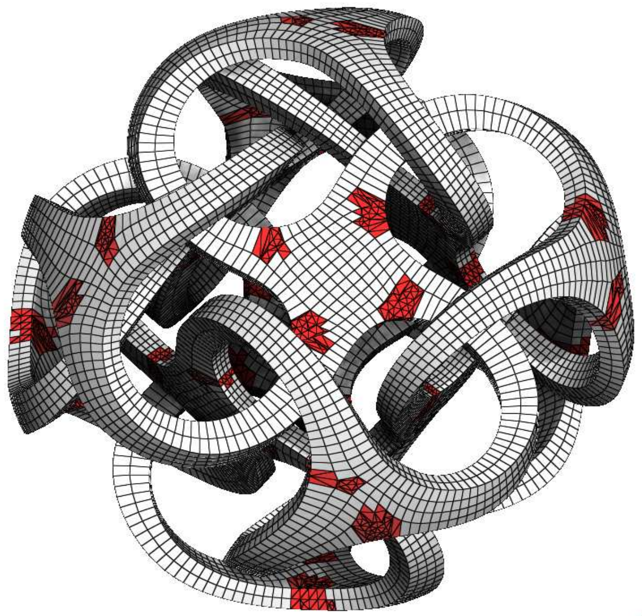


I. Génération de maillage hex-dominants

ALICE : mailleur hex-tet

contribution : maillage robuste *[Ray, Sokolov, **Reberol**, Ledoux, Levy '18]*

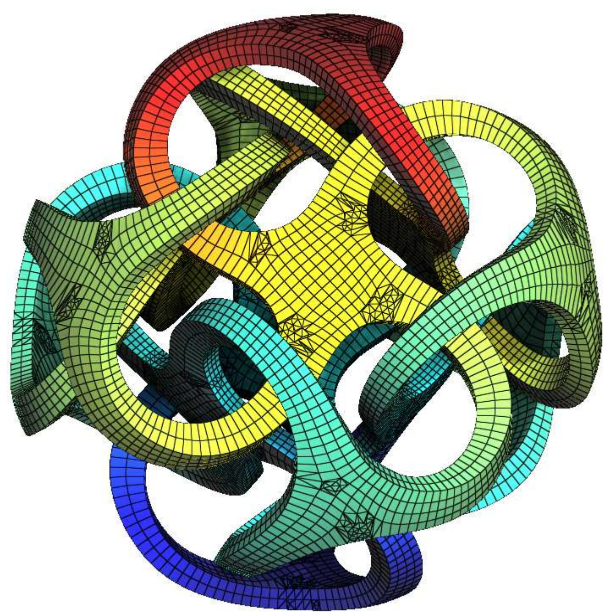
Sommaire



I. Génération de maillage hex-dominants

ALICE : mailleur hex-tet

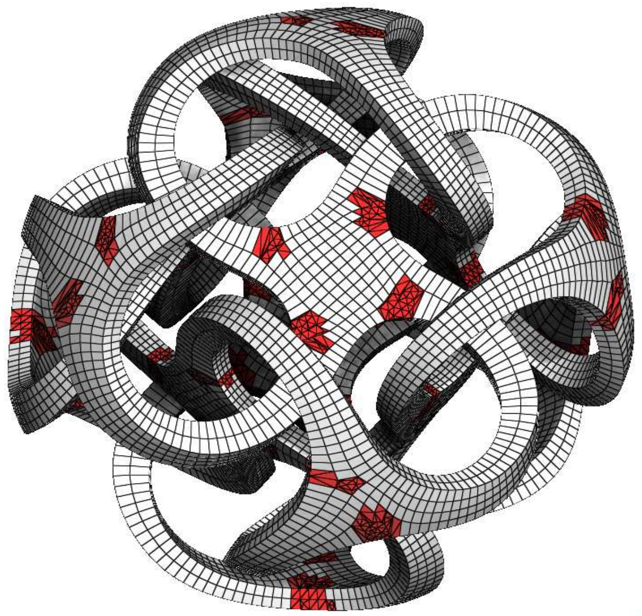
contribution : maillage robuste *[Ray, Sokolov, **Reberol**, Ledoux, Levy '18]*



II. Éléments finis sur maillages hex-tet

contribution : espace continu $\mathcal{H}yb_k\ (\mathbb{Q}_k, \mathbb{P}_{2k}, \mathbb{P}_k)$

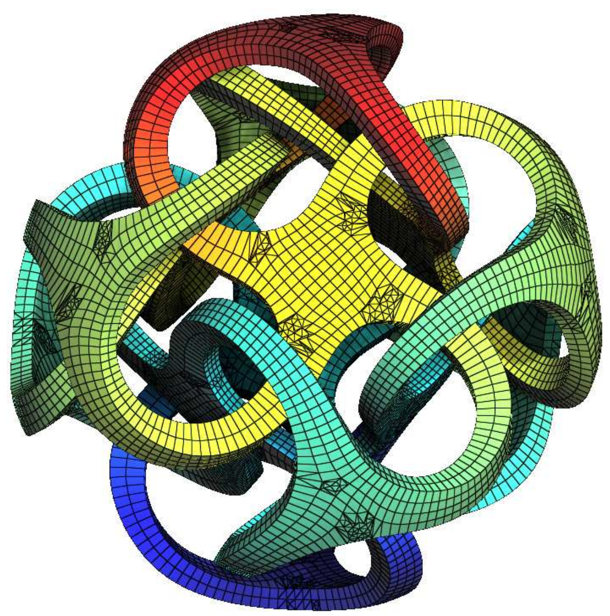
rapport *[**Reberol** et Lévy '16]*



I. Génération de maillage hex-dominants

ALICE : mailleur hex-tet

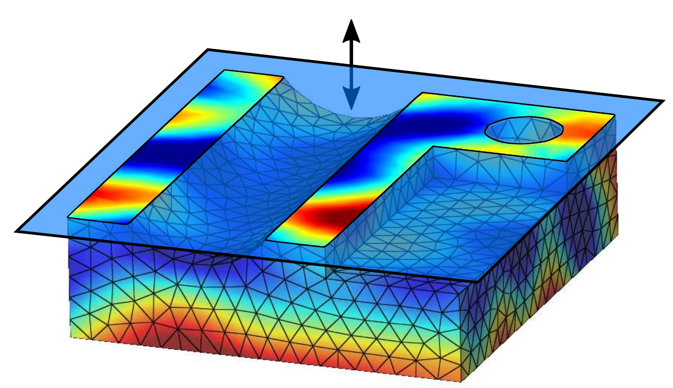
contribution : maillage robuste *[Ray, Sokolov, **Reberol**, Ledoux, Levy '18]*



II. Éléments finis sur maillages hex-tet

contribution : espace continu $\mathcal{H}yb_k\ (\mathbb{Q}_k, \mathbb{P}_{2k}, \mathbb{P}_k)$

rapport *[**Reberol** et Lévy '16]*



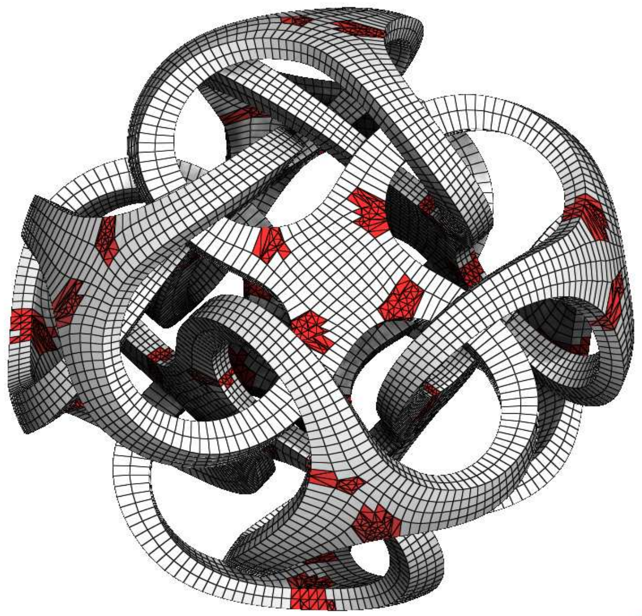
$||u_h - u_{ref}||$

III. Méthode d'évaluation

contribution : calcul de distance efficace

article *[**Reberol** et Lévy '18]*

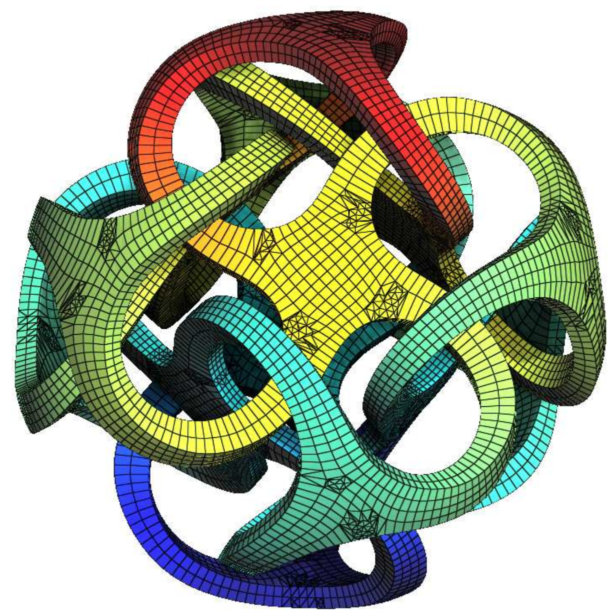
Sommaire



I. Génération de maillage hex-dominants

ALICE : mailleur hex-tet

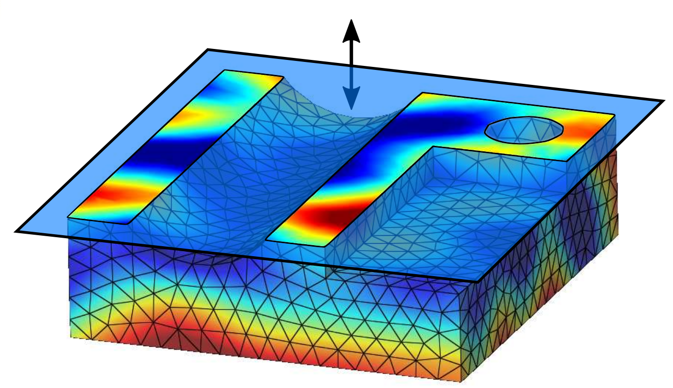
contribution : maillage robuste *[Ray, Sokolov, **Reberol**, Ledoux, Levy '18]*



II. Éléments finis sur maillages hex-tet

contribution : espace continu $\mathcal{H}yb_k\ (\mathbb{Q}_k, \mathbb{P}_{2k}, \mathbb{P}_k)$

rapport *[**Reberol** et Lévy '16]*



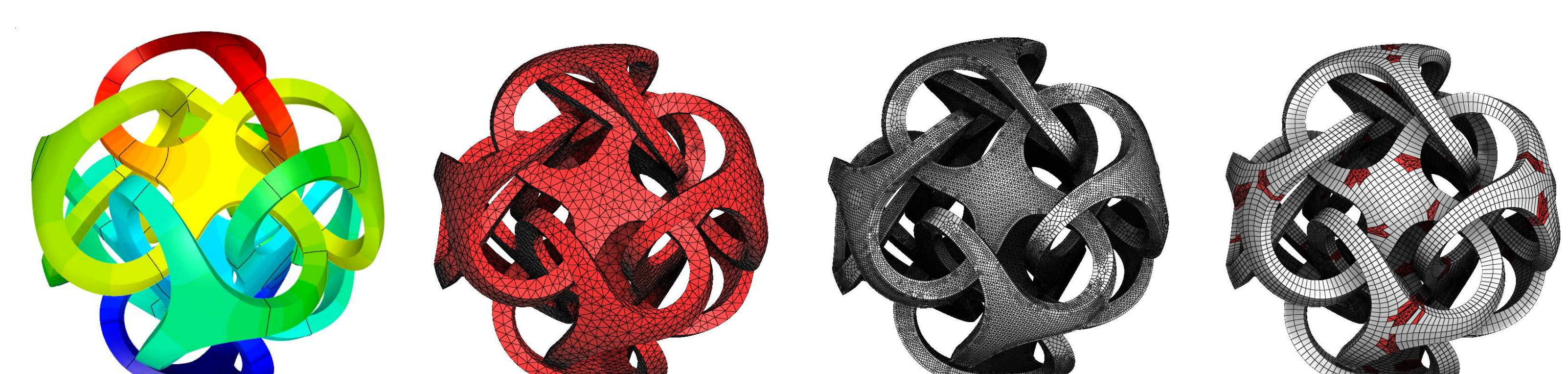
$||u_h - u_{ref}||$

III. Méthode d'évaluation

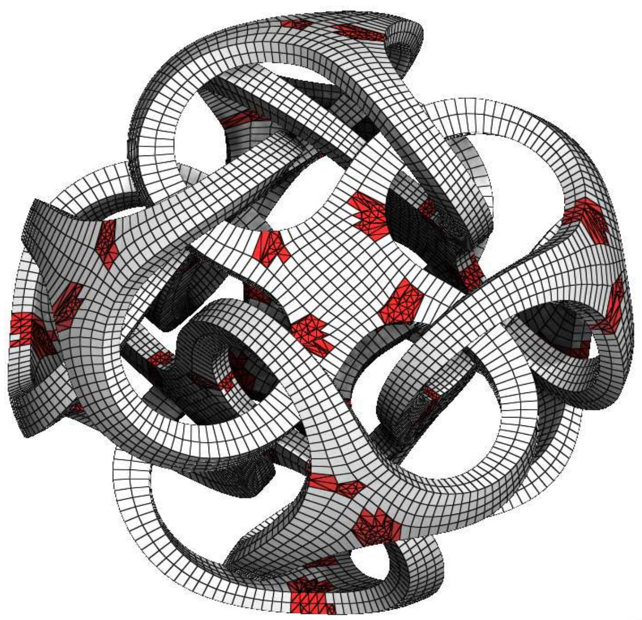
contribution : calcul de distance efficace

article *[**Reberol** et Lévy '18]*

IV. Comparaisons de solutions



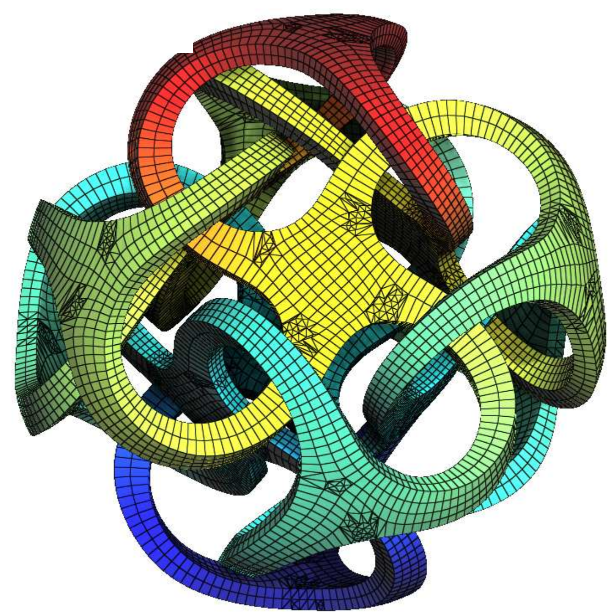
Sommaire



I. Génération de maillage hex-dominants

ALICE : mailleur hex-tet

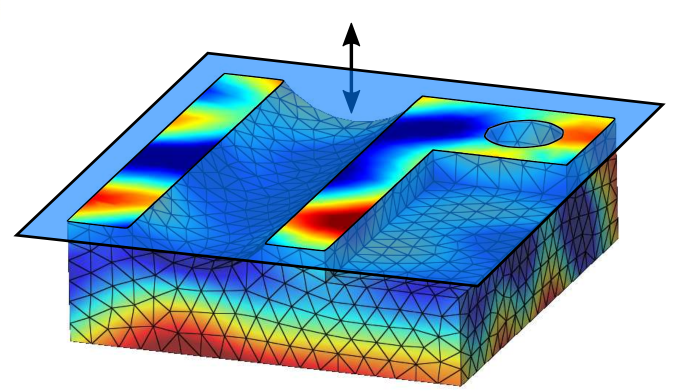
contribution : maillage robuste *[Ray, Sokolov, **Reberol**, Ledoux, Levy '18]*



II. Éléments finis sur maillages hex-tet

contribution : espace continu $\mathcal{H}yb_k \; (\mathbb{Q}_k, \mathbb{P}_{2k}, \mathbb{P}_k)$

*rapport [**Reberol** et Lévy '16]*



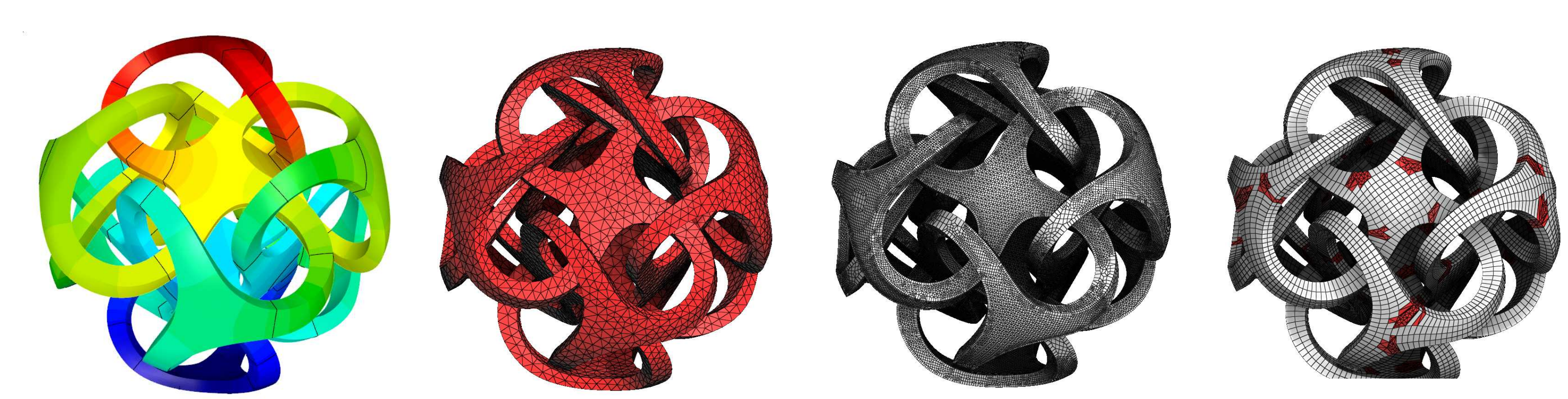
$$||u_h - u_{ref}||$$

III. Méthode d'évaluation

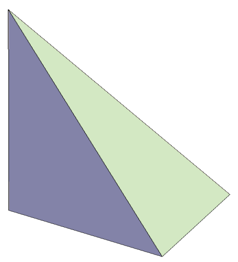
contribution : calcul de distance efficace

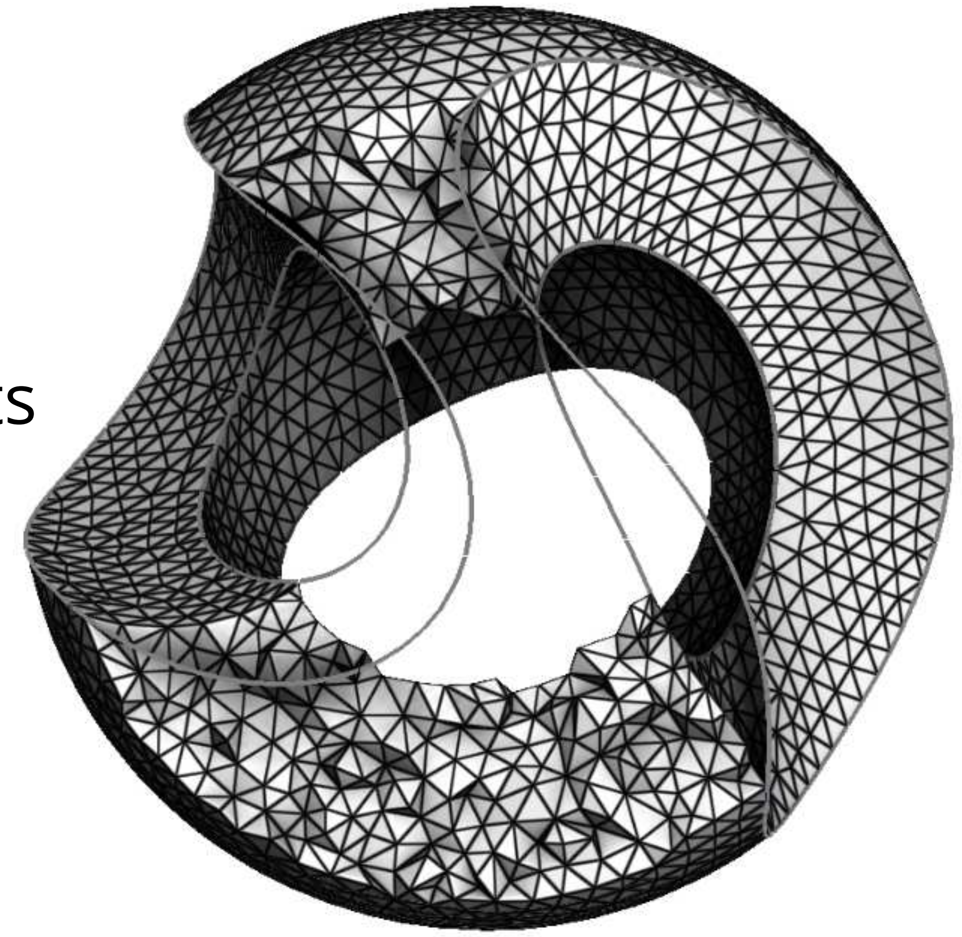
*article [**Reberol** et Lévy '18]*

IV. Comparaisons de solutions

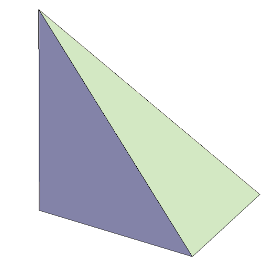


- Tétraèdres :
  - maillage automatique robuste
    [George et al. '90, Frey et George '08, ...]
  - librairies open-source : TetGen, mmg3d
    [Si '15, Dapogny et al. '14]

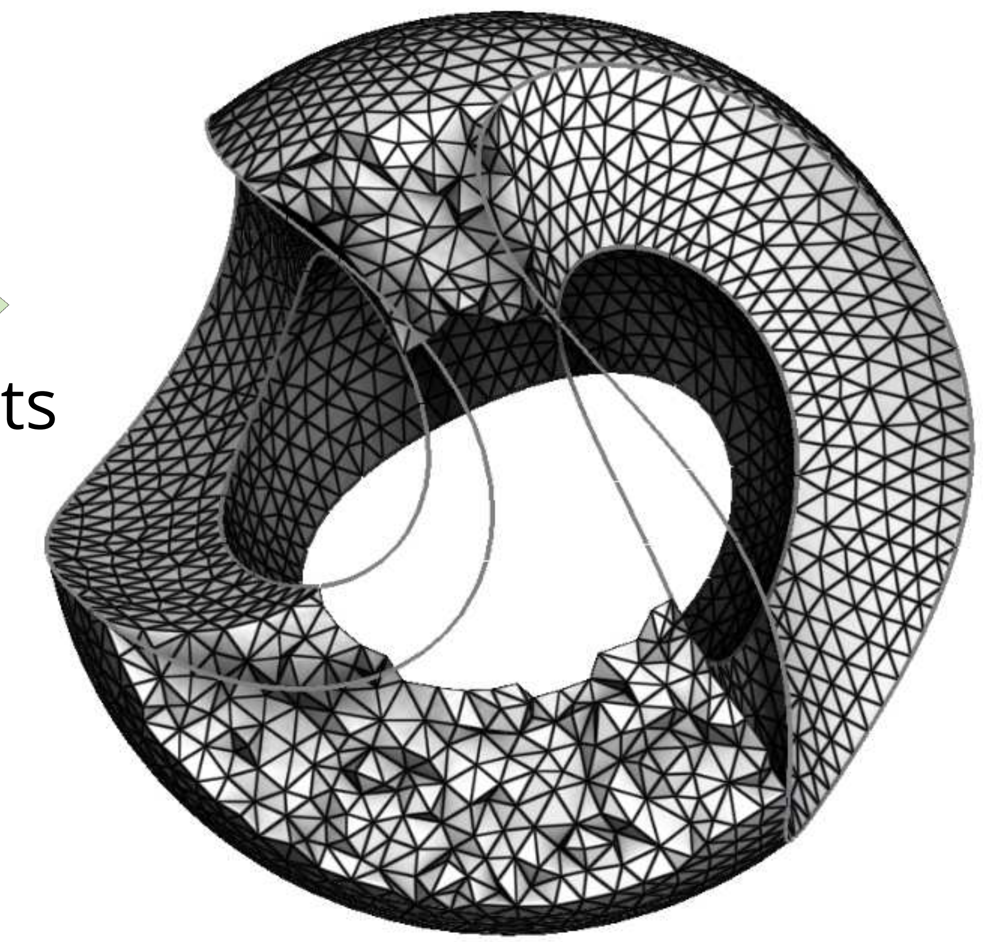




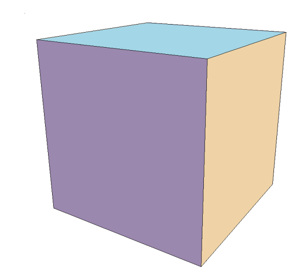
- Tétraèdres :
  - maillage automatique robuste
    [George et al. '90, Frey et George '08, ...]
  - librairies open-source : TetGen, mmg3d
    [Si '15, Dapogny et al. '14]



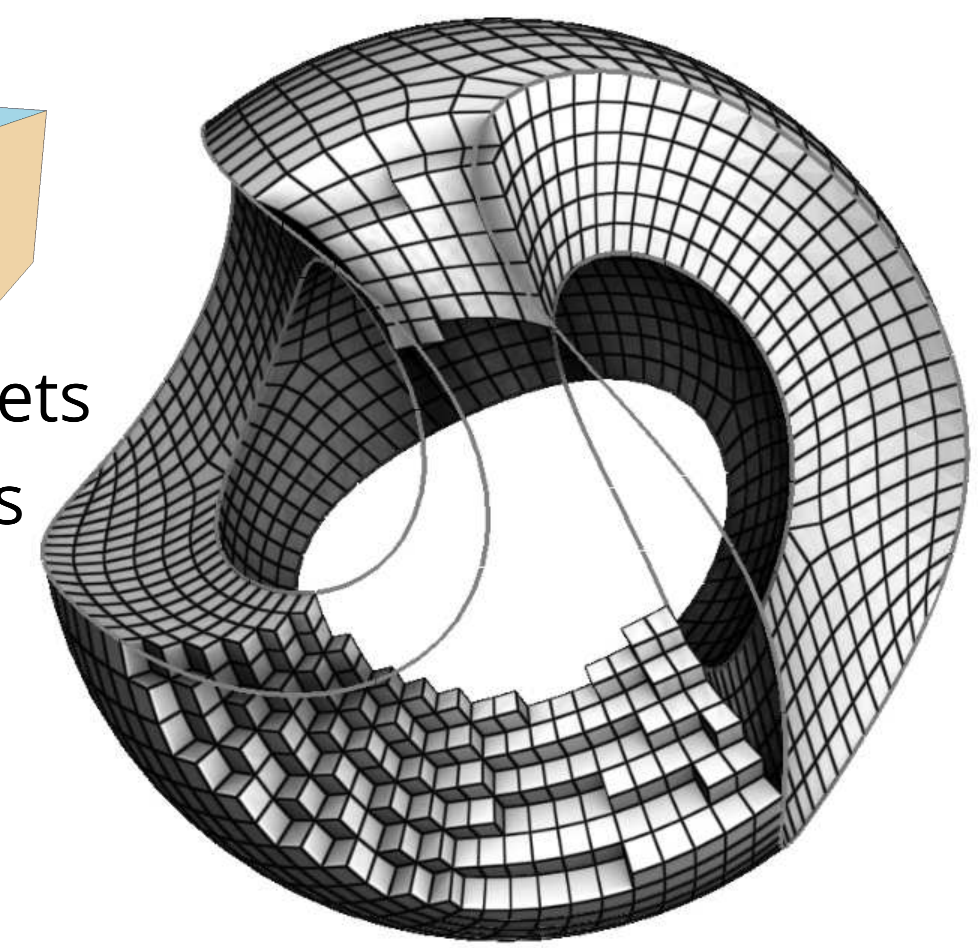
4 sommets
4 faces



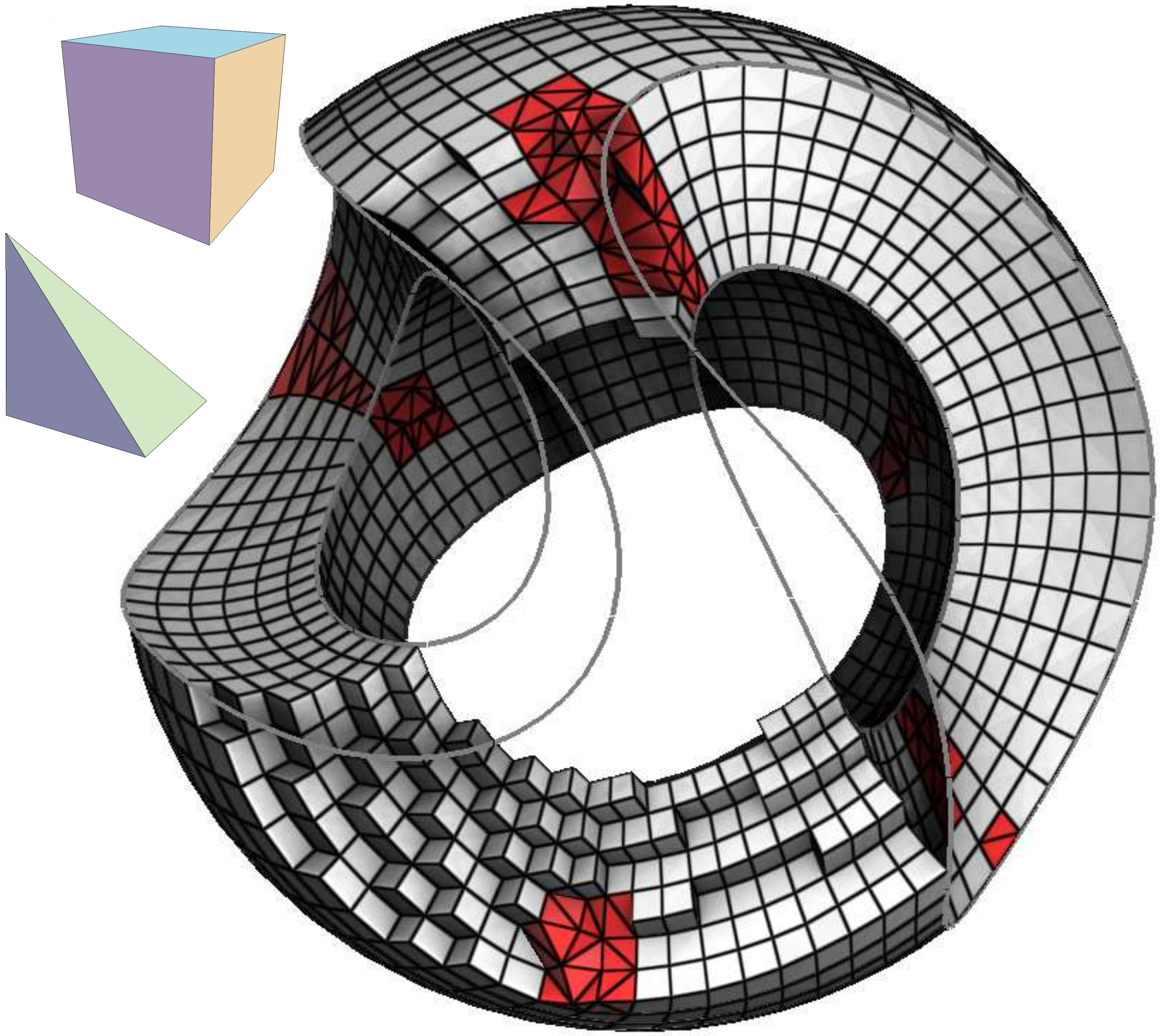
- Hexaèdres (alignés avec les bords) :
  - pas de maillage automatique dans le cas général
  - problème difficile (20 ans de recherche)
    [Tautges et al. '96, Owen '98, Nieser et al. '11, ...]
  - *consensus :* préferables pour la méthode des éléments finis



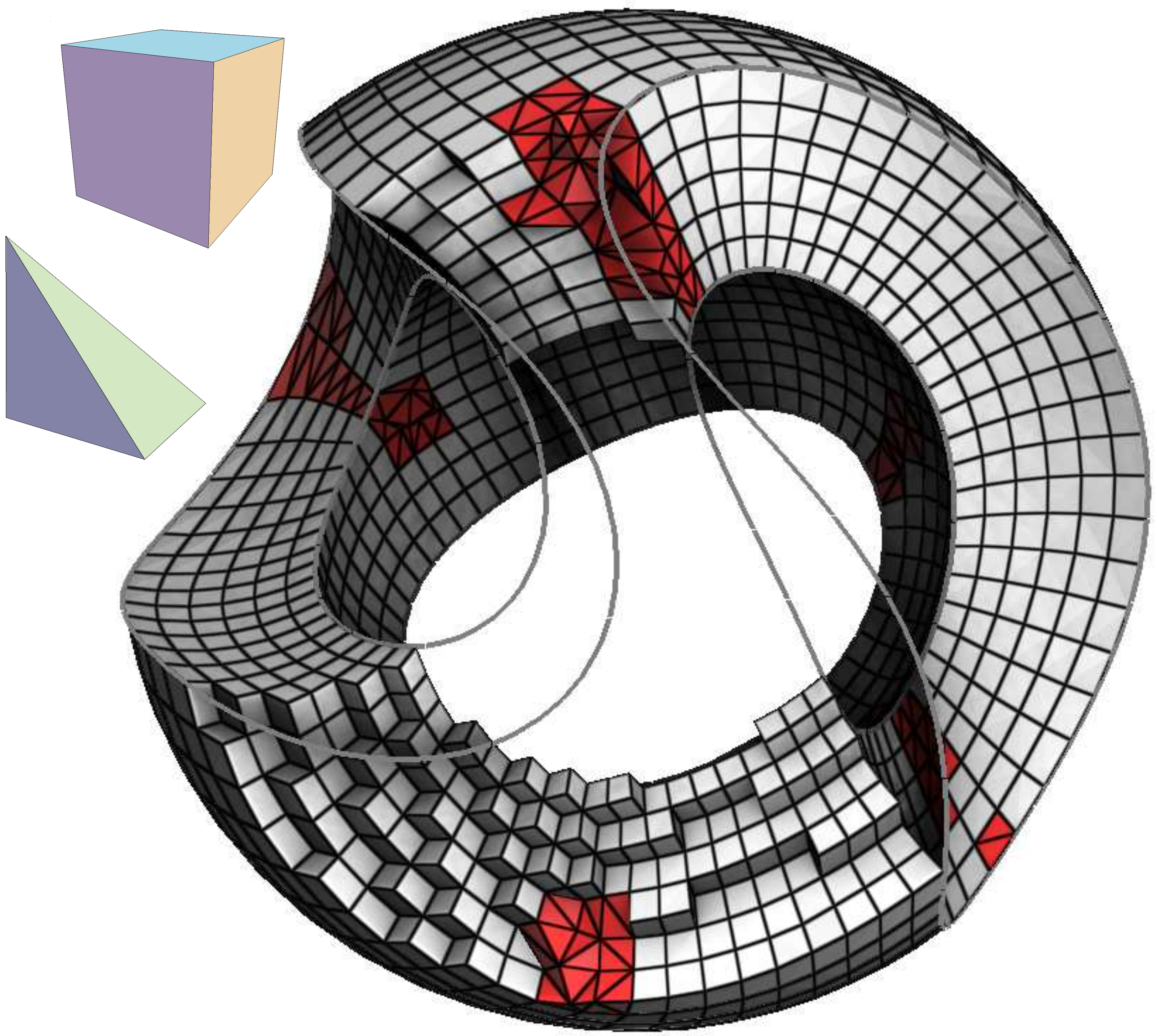
8 sommets
6 faces



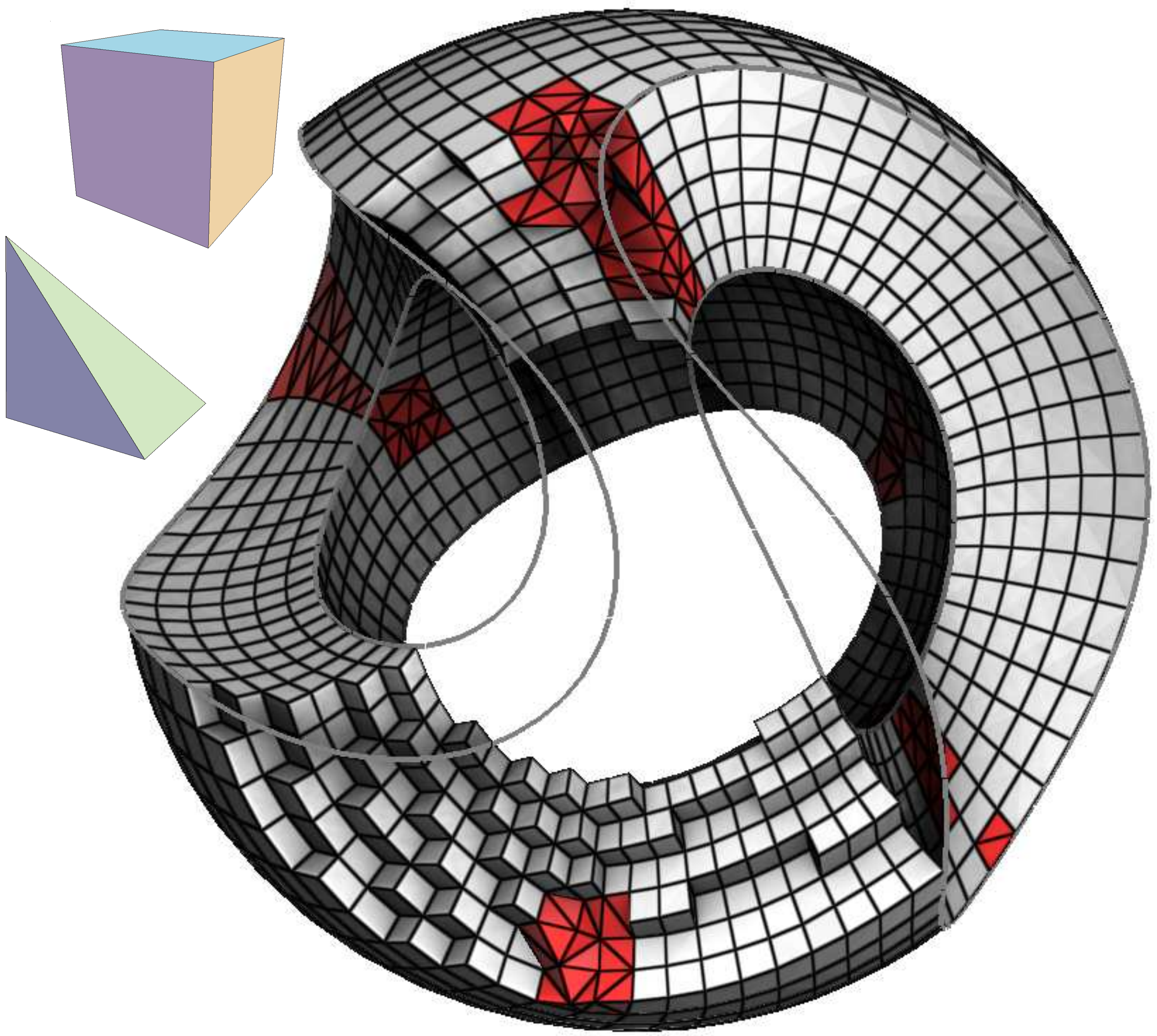
- Composition :
  - majorité d'hexaèdres
  - des régions non-hexaédriques, les cavités



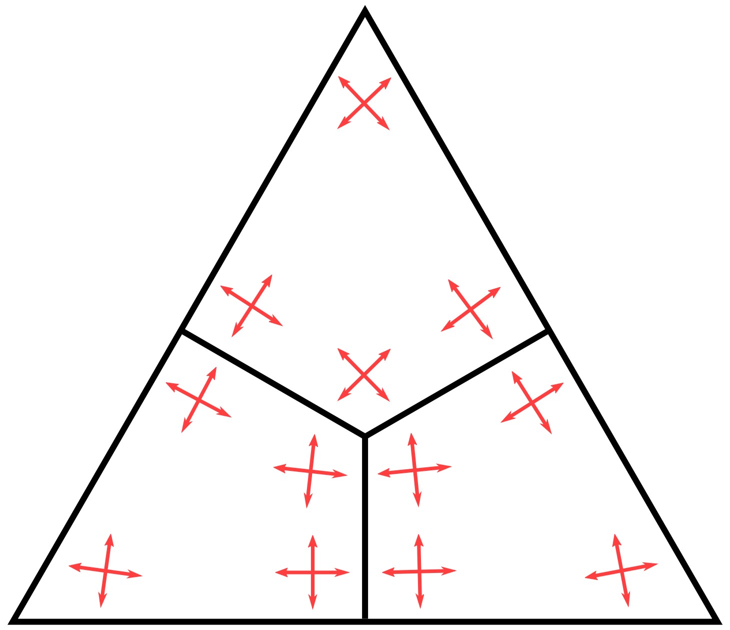
- Composition :
  - majorité d'hexaèdres
  - des régions non-hexaédriques, les cavités
- En général, cavités remplies par :
  - des tétraèdres
  - *(optionnel)* des pyramides et prismes



- Composition :
  - majorité d'hexaèdres
  - des régions non-hexaédriques, les cavités
- En général, cavités remplies par :
  - des tétraèdres
  - *(optionnel)* des pyramides et prismes
- L'idée est de profiter de :
  - la précision et structure des hexaèdres
  - la flexibilité géométrique des tétraèdres

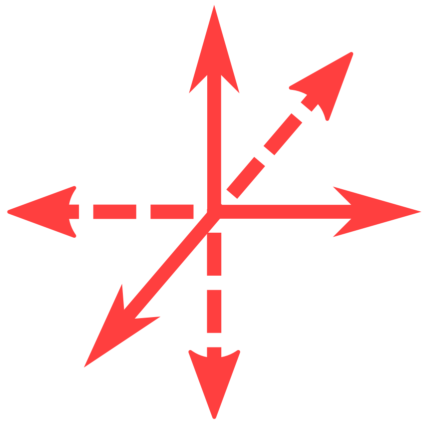


Champs de directions
(guide géometrique)



2D (croix)

[Ray et al. '08]

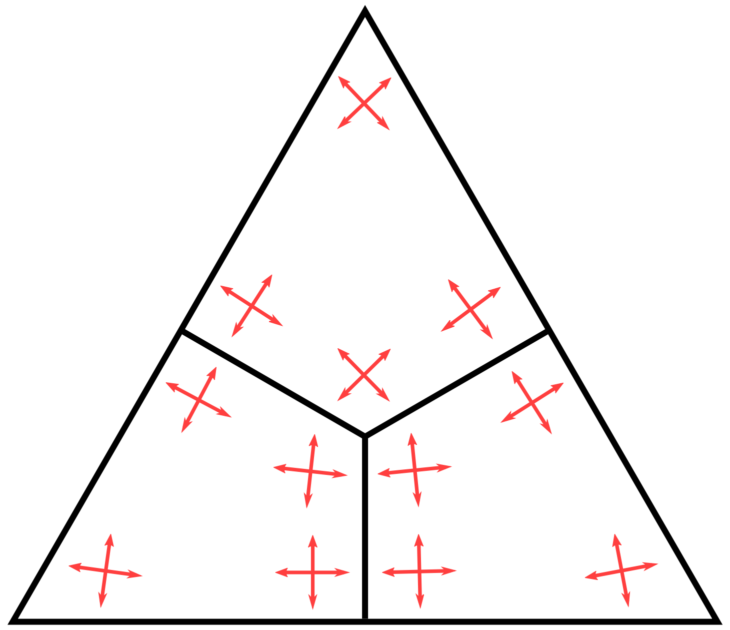


3D (frames)

[Huang et al. '11]

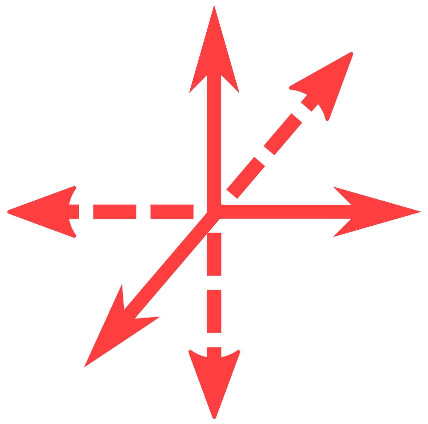
[Kowalski et al. '13]

Champs de directions (guide géometrique)



2D (croix)

[Ray et al. '08]



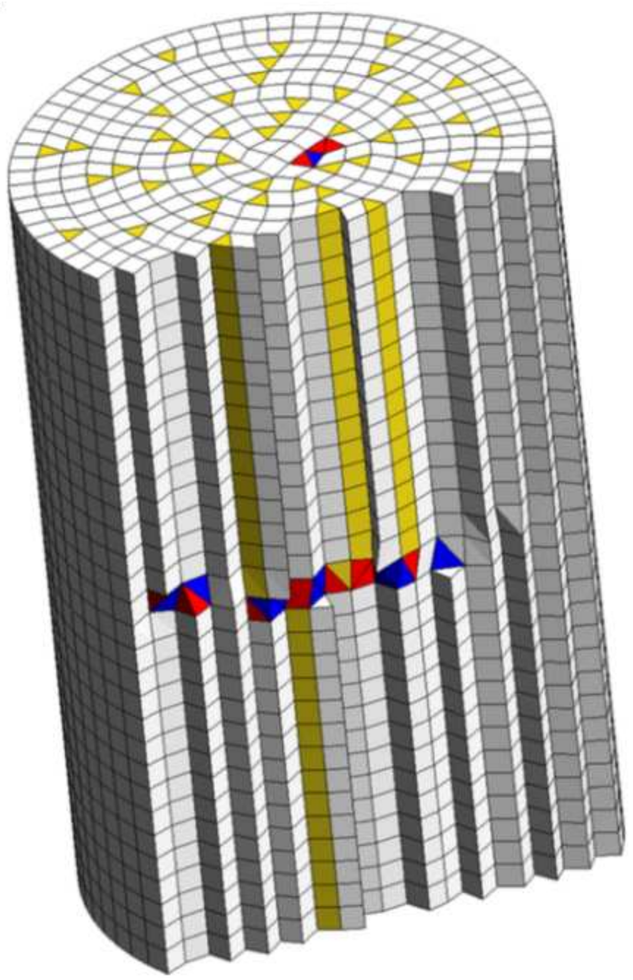
3D (frames)

[Huang et al. '11]

[Kowalski et al. '13]

Placement de points et tet + recombinaison

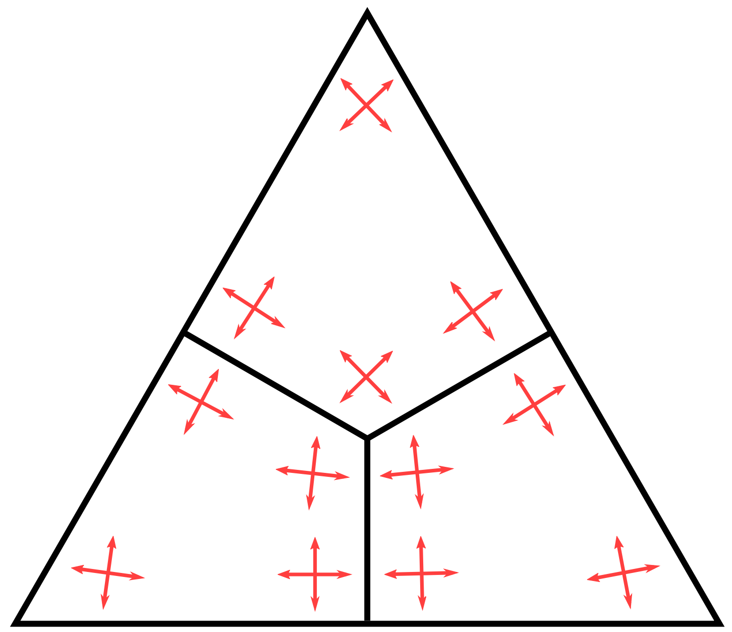
(approches indirectes)



[Baudouin et al. '14]
[Botella et al. '14]
[Sokolov et al. '16]

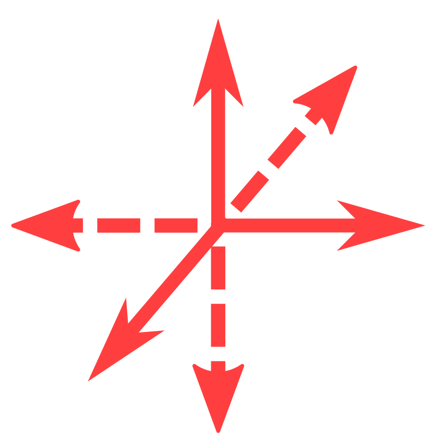
État de l'art : progrès récents en maillage hex-dom

Champs de directions (guide géometrique)



2D (croix)

[Ray et al. '08]



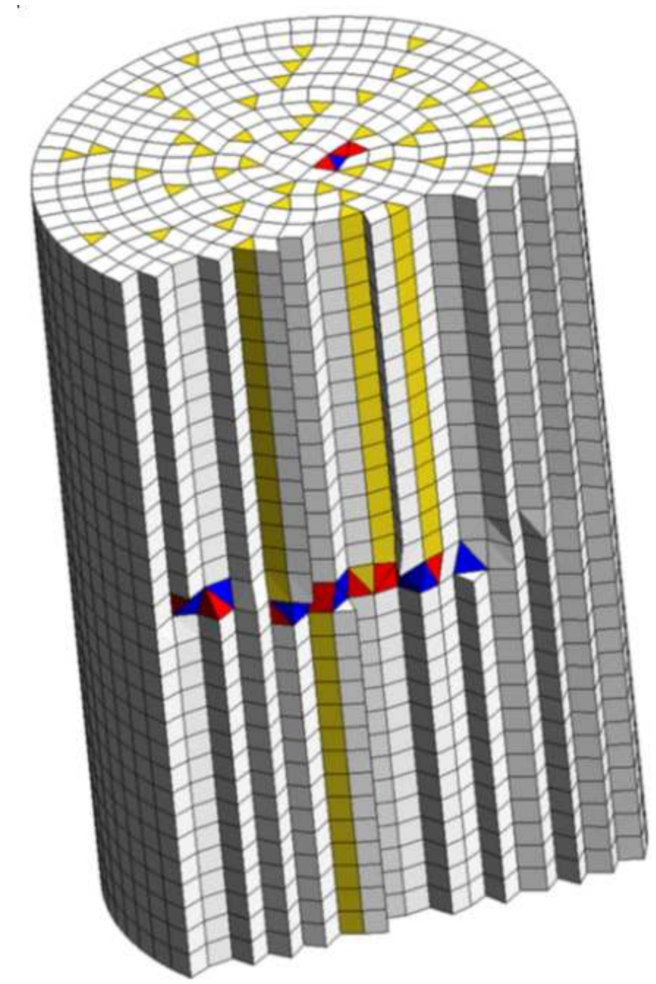
3D (frames)

[Huang et al. '11]

[Kowalski et al. '13]

Placement de points et tet + recombinaison

(approches indirectes)

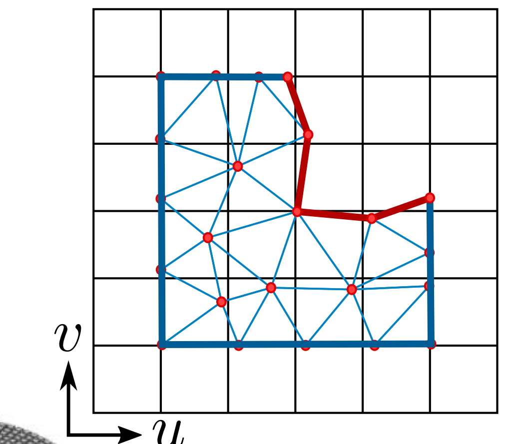


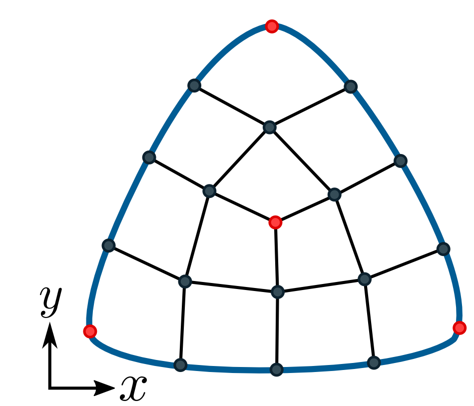
[Baudouin et al. '14]
[Botella et al. '14]
[Sokolov et al. '16]

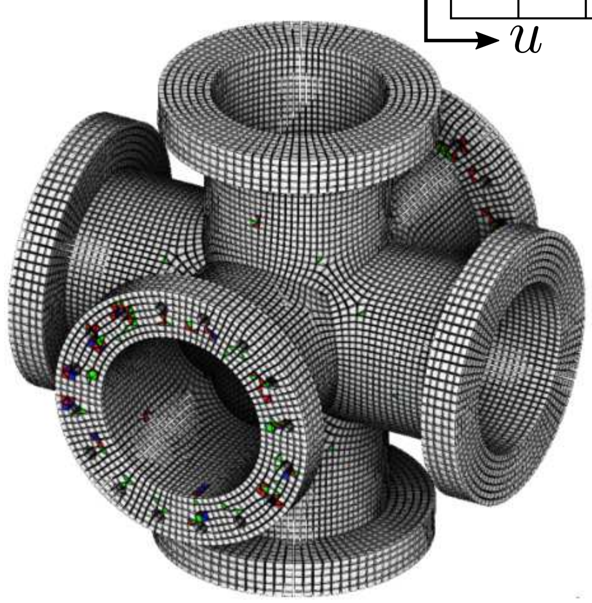
ou ---

Paramétrisation et extraction iso-valeurs

(approches directes)

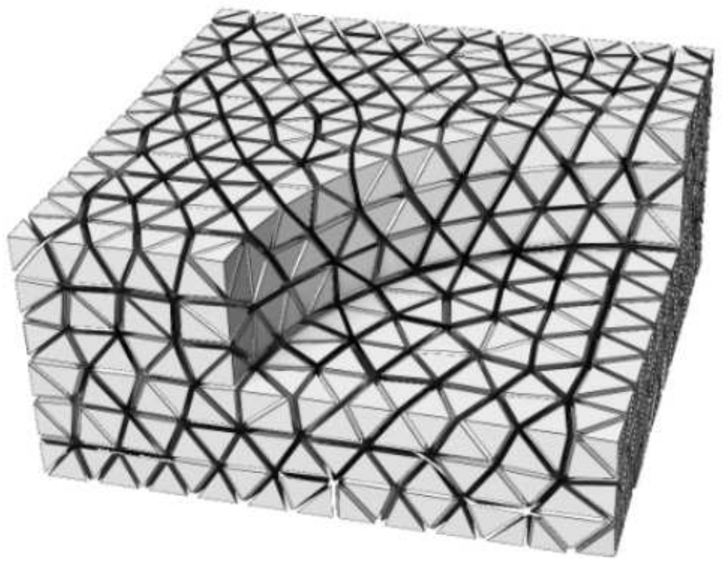




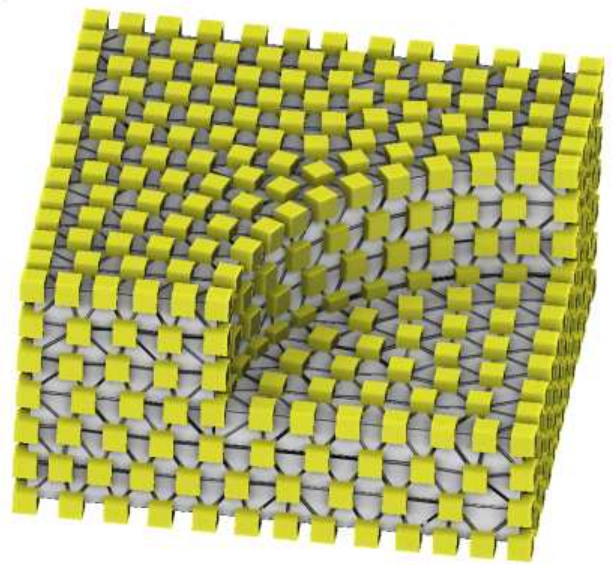


[Nieser et al. '11] (CubeCover)
[Sokolov et al. '16] (PGP 3D)
[Lyon et al. '16] (HexEx)

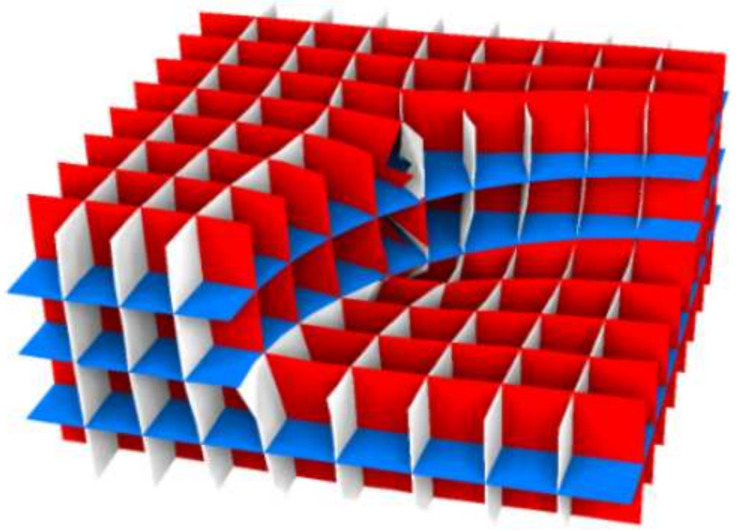
- Pipeline du mailleur hexdom d'ALICE :



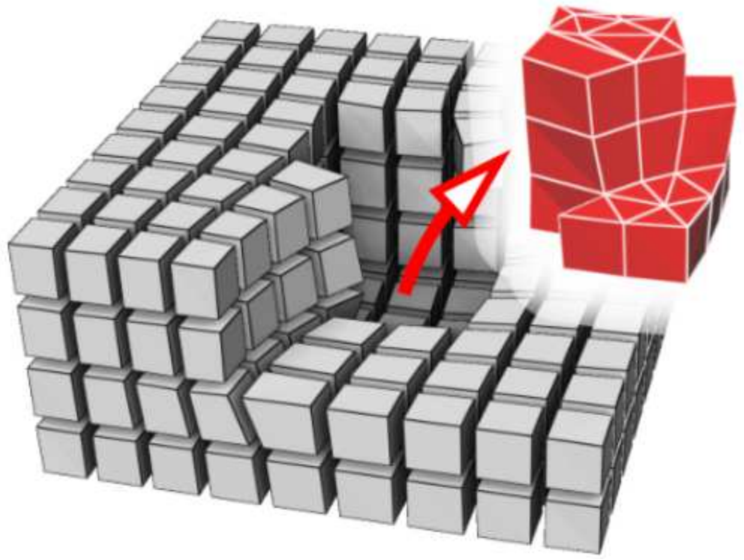
entrée



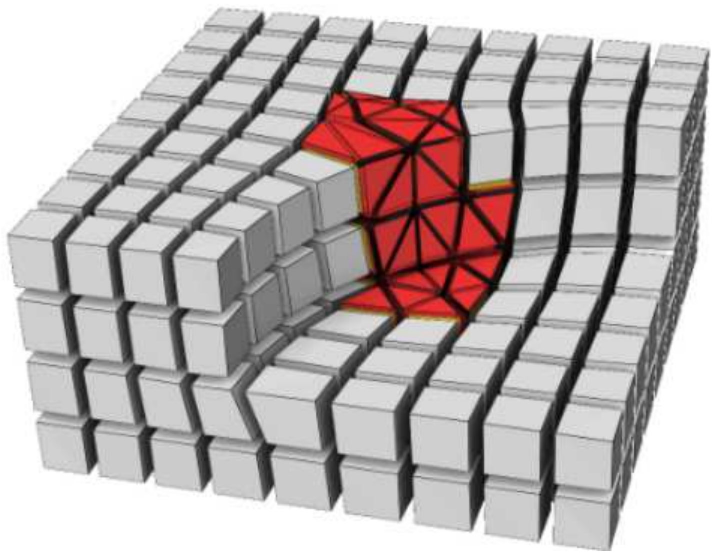
champ de directions



paramétrisation (isovaleurs)

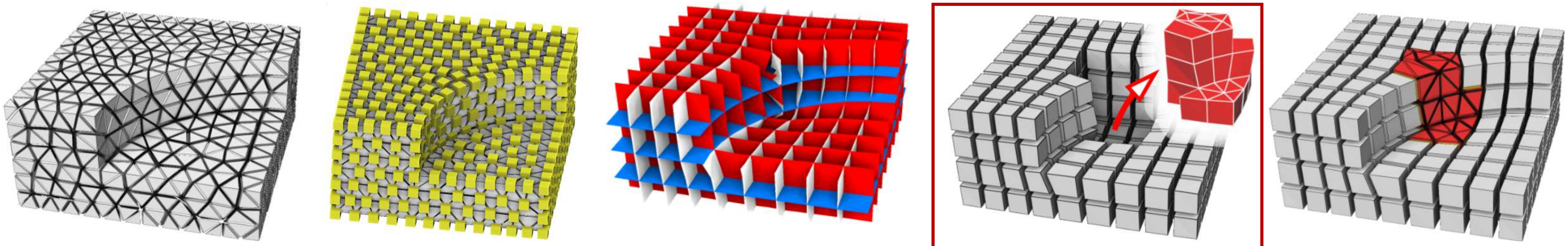


extraction
- d'hexaèdres
- de cavités



sortie

- Pipeline du mailleur hexdom d'ALICE :

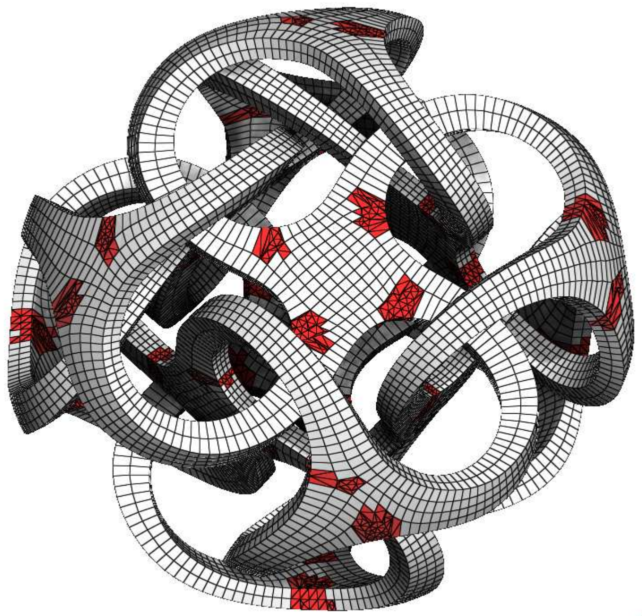


entrée	champ de directions	paramétrisation (isovaleurs)	extraction - d'hexaèdres - de cavités	sortie

- Contribution : travail sur l'extraction de cavités pour maillage robuste

*Ray N., Sokolov D., **Reberol M.**, Ledoux F. et Lévy B., Hexahedral Meshing: Mind the Gap!, 2018*

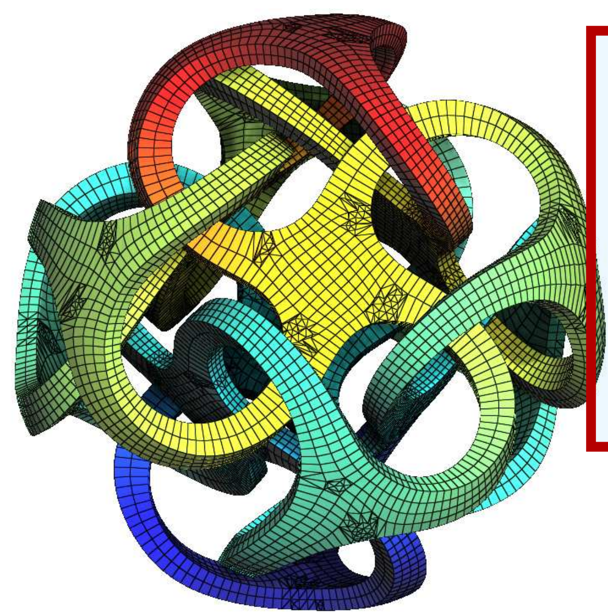
Sommaire



I. Génération de maillage hex-dominants

ALICE : mailleur hex-tet

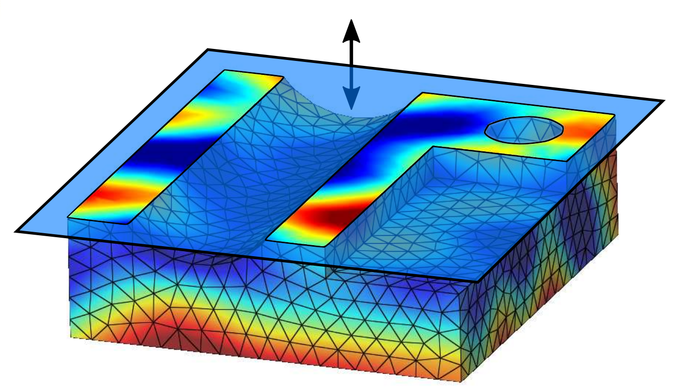
contribution : maillage robuste *[Ray, Sokolov, **Reberol**, Ledoux, Levy '18]*



II. Éléments finis sur maillages hex-tet

contribution : espace continu $\mathcal{H}yb_k\ (\mathbb{Q}_k, \mathbb{P}_{2k}, \mathbb{P}_k)$

rapport *[**Reberol** et Lévy '16]*



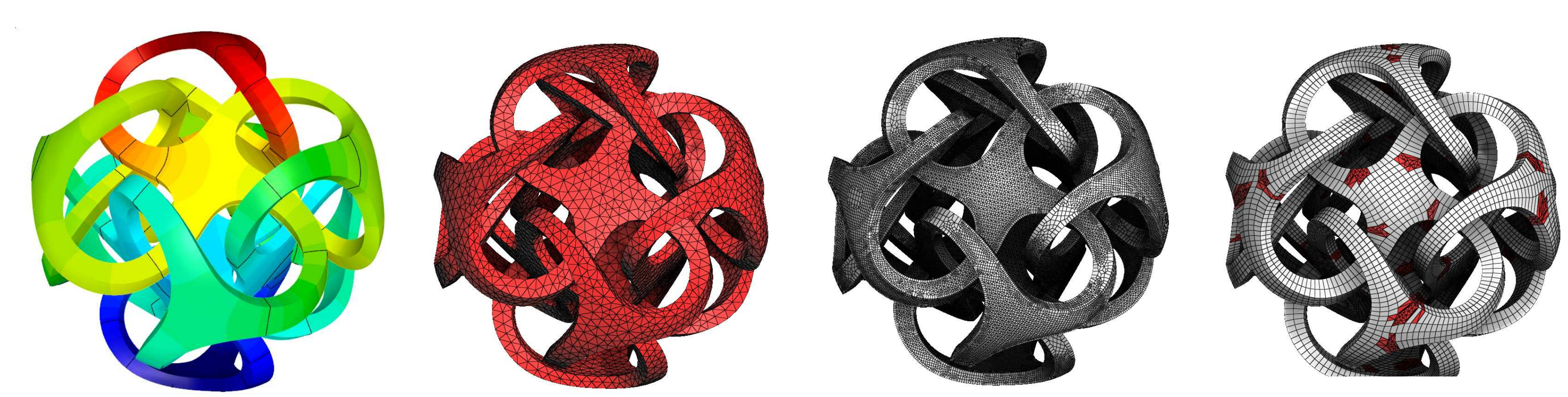
$||u_h - u_{ref}||$

III. Méthode d'évaluation

contribution : calcul de distance efficace

article *[**Reberol** et Lévy '18]*

IV. Comparaisons de solutions

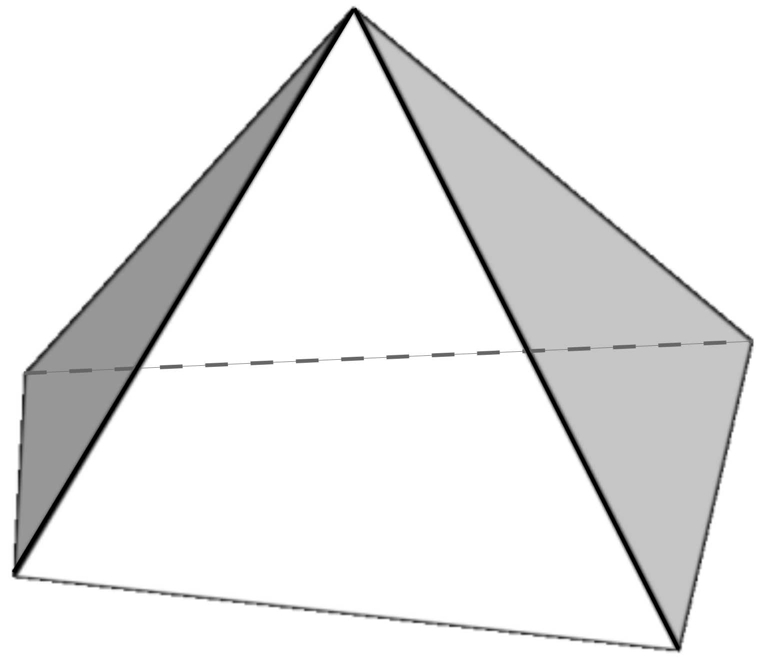


- Objectif : représenter des fonctions continues (espace $V_h \subset H^1$)

  (donne des garanties théoriques pour FEM)

- Objectif : représenter des fonctions continues (espace $V_h \subset H^1$)

  (donne des garanties théoriques pour FEM)



- Maillages conformes

  - conforme : correspondance des faces entre éléments adjacents

  - pyramides (1 quad - 4 triangles) entre hexs et tets

  .. mais ..

  - pas de polynômes compatibles avec hex et tet

  - interpolation :

    - fonctions rationnelles *[Bedrosian '92; Bergot et al. '09,'10,'13; Nigam et al. '11; Fuentes et al. '15]*

    - polynômes composites *[Wieners '97; Liu et al. '04; Ainsworth et al. '16,'17]*

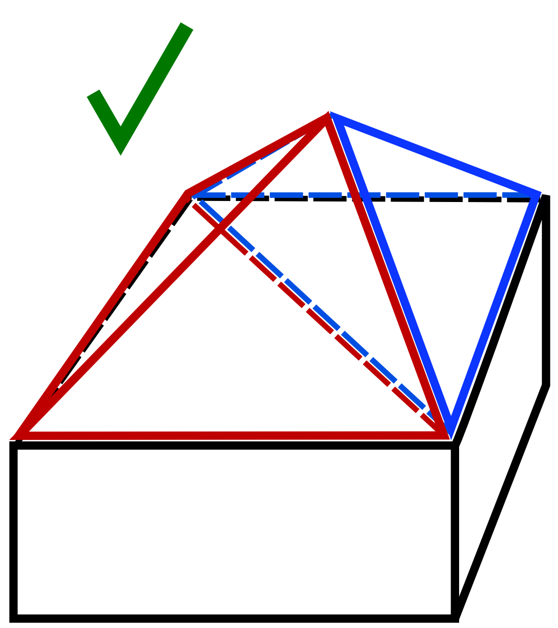
- Objectif : représenter des fonctions continues (espace $V_h \subset H^1$)

  (donne des garanties théoriques pour FEM)

- Maillages non-conformes :

  - non-conforme : deux faces de tétraèdre connectés à une face quad d'hexaèdre
  - généré nativement par mailleurs hex-dominants
  - littérature :

(affine,
"pyramidable")



Fct. continues *[Dewhirst et al. '93, Marais et al. '08]*
Fct. discontinues (DG et Nitsche)
[Degerfeldt et al. '06, Durochat et al. '13]

FEM sur maillages hex-dominants : état de l'art

- Objectif : représenter des fonctions continues (espace $V_h \subset H^1$)

  (donne des garanties théoriques pour FEM)

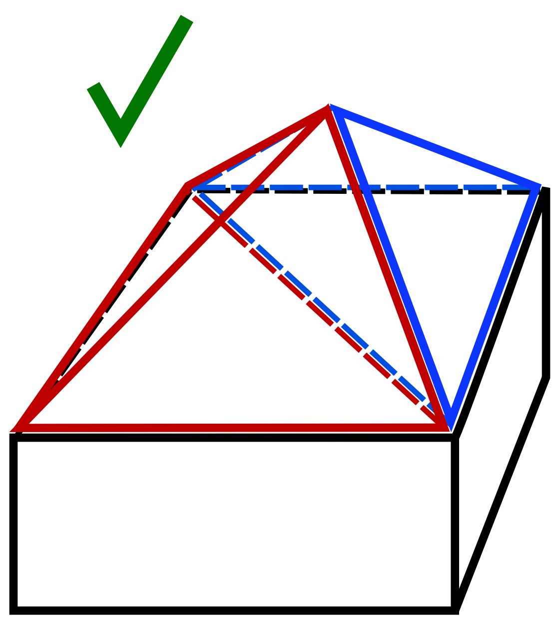
- Maillages non-conformes :

  - non-conforme : deux faces de tétraèdre connectés à une face quad d'hexaèdre

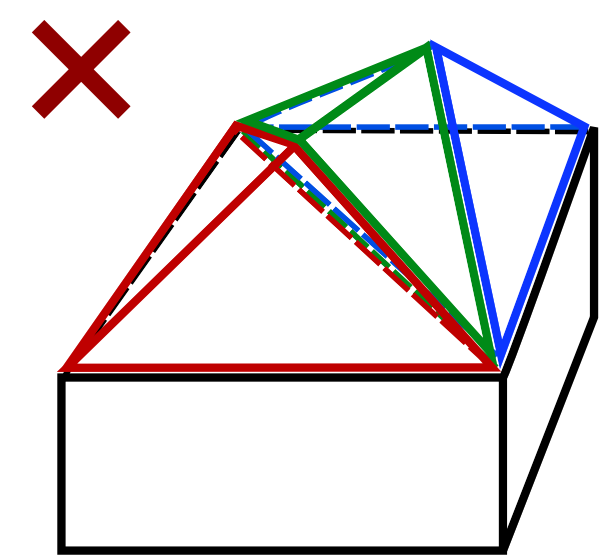
  - généré nativement par mailleurs hex-dominants

  - littérature :

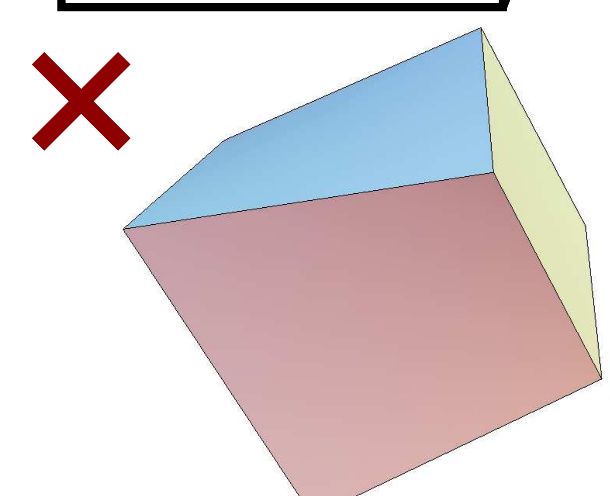
(affine,
"pyramidable")



Fct. continues *[Dewhirst et al. '93, Marais et al. '08]*
Fct. discontinues (DG et Nitsche)
[Degerfeldt et al. '06, Durochat et al. '13]

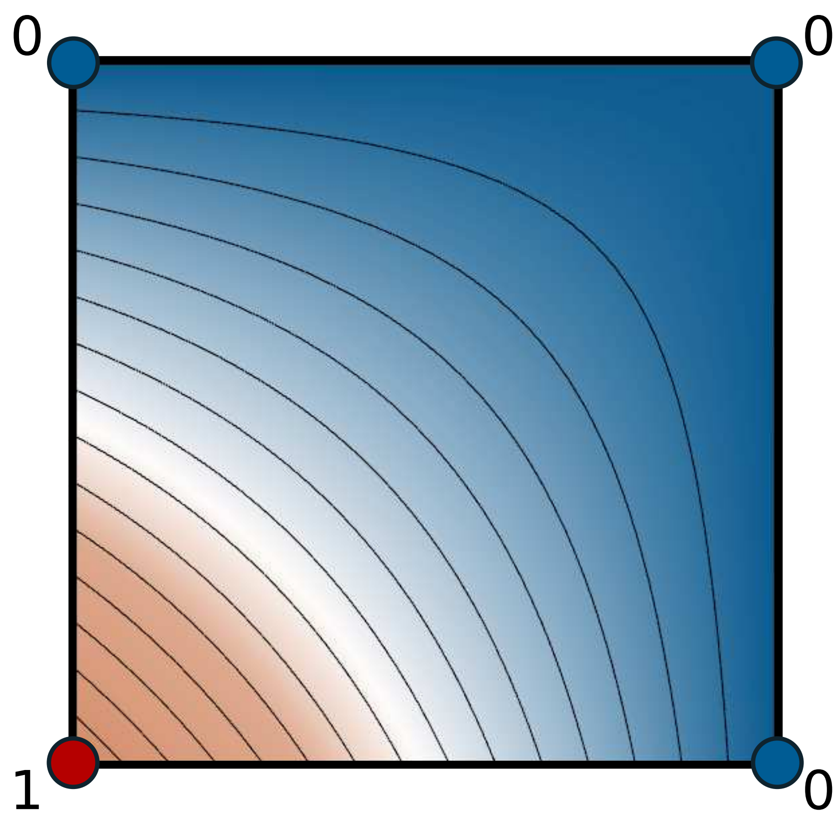


(non "pyramidable")



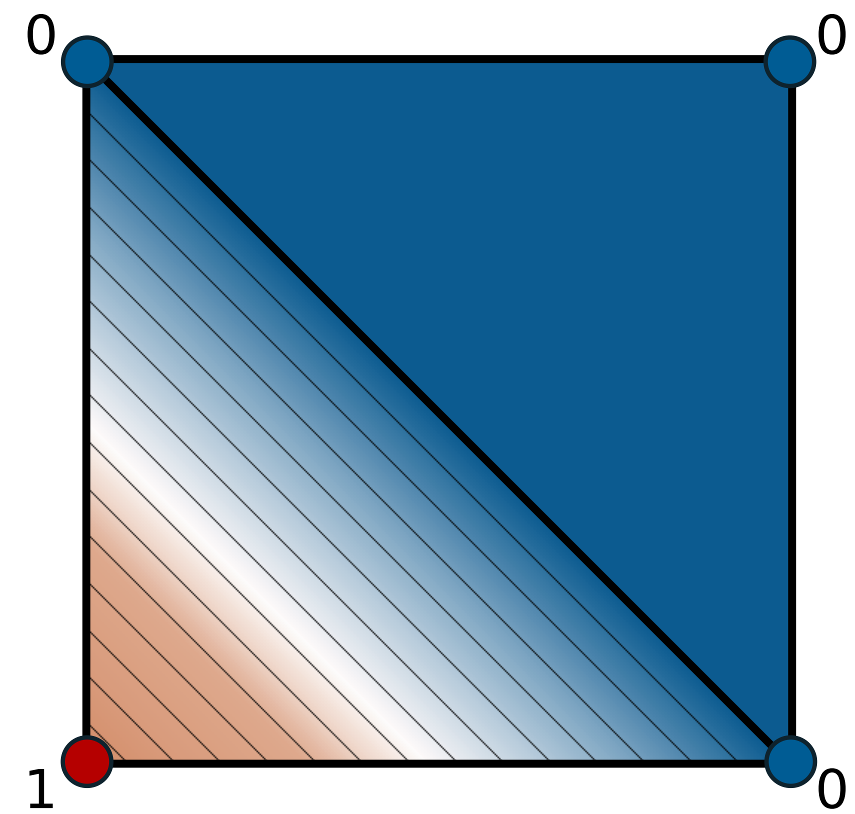
(trilinéaire,
faces non-planaires)

Le problème :



$\mathbb{Q}_1$

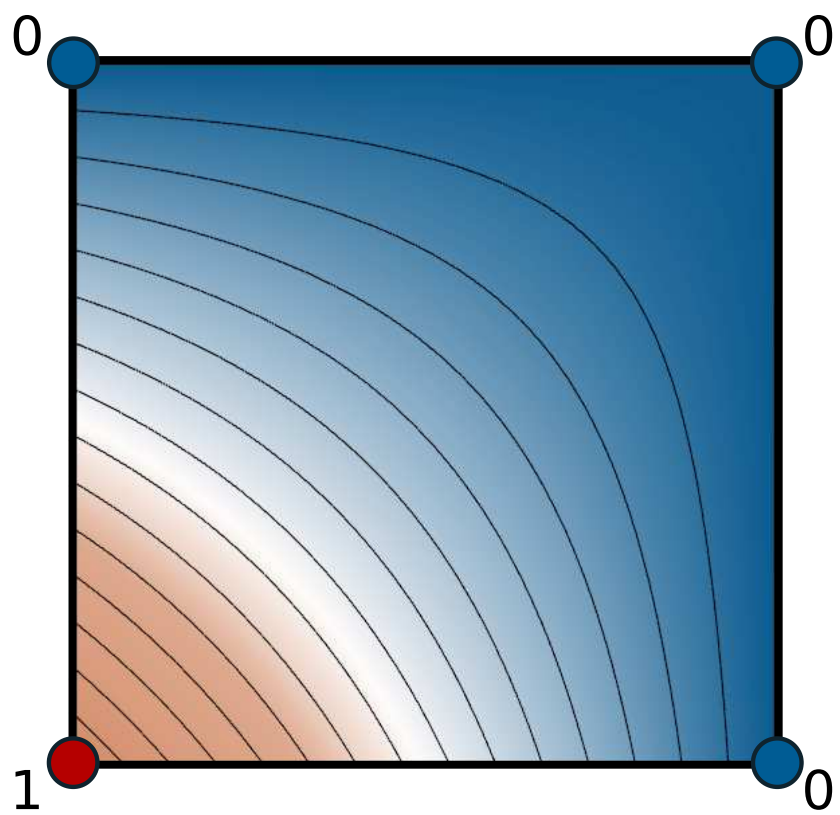
(fonction bilinéaire)



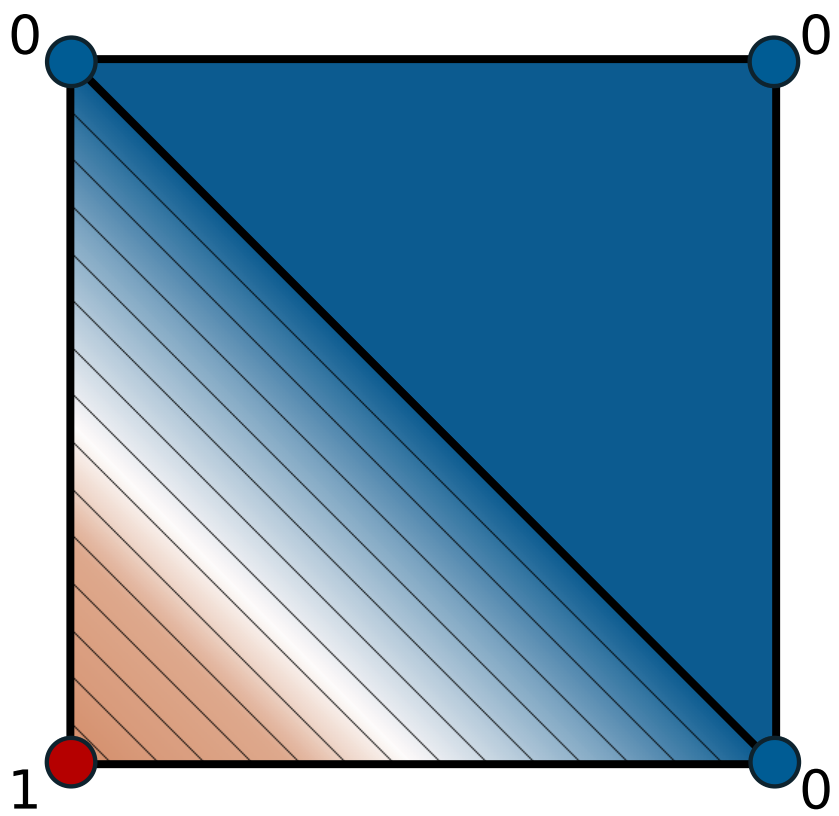
$\mathbb{P}_1$

○ degrés de liberté

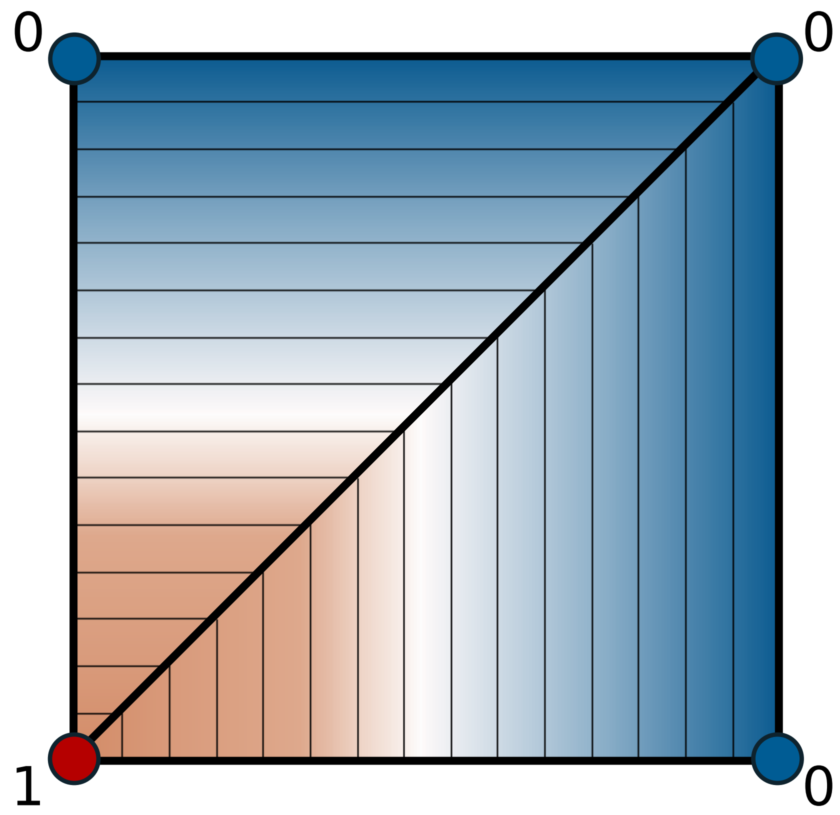
Le problème :



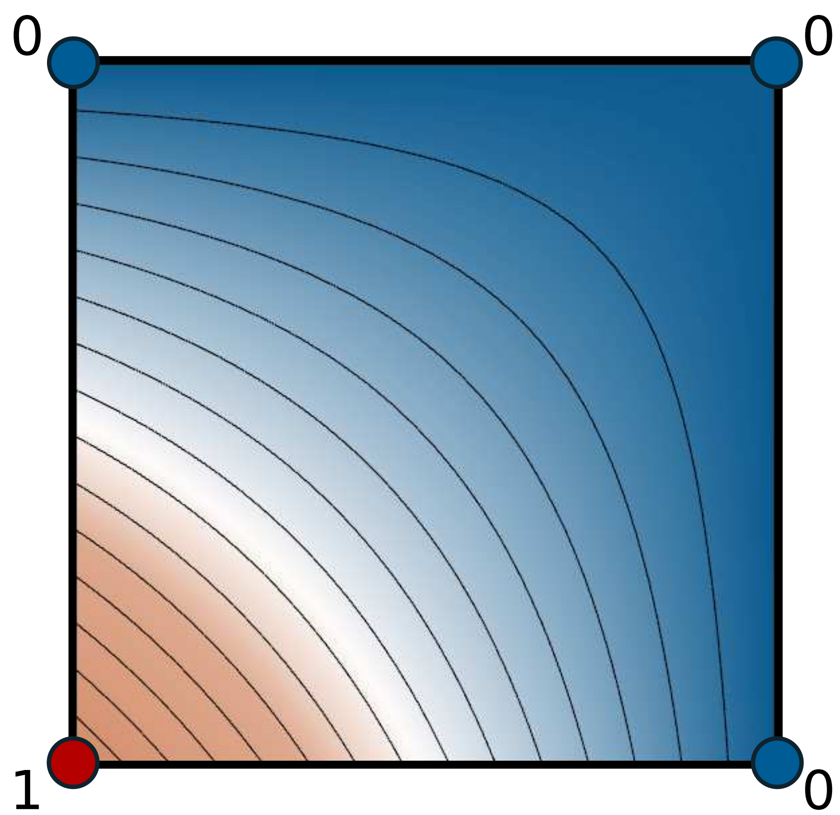
$\mathbb{Q}_1$
(fonction bilinéaire)



$\mathbb{P}_1$

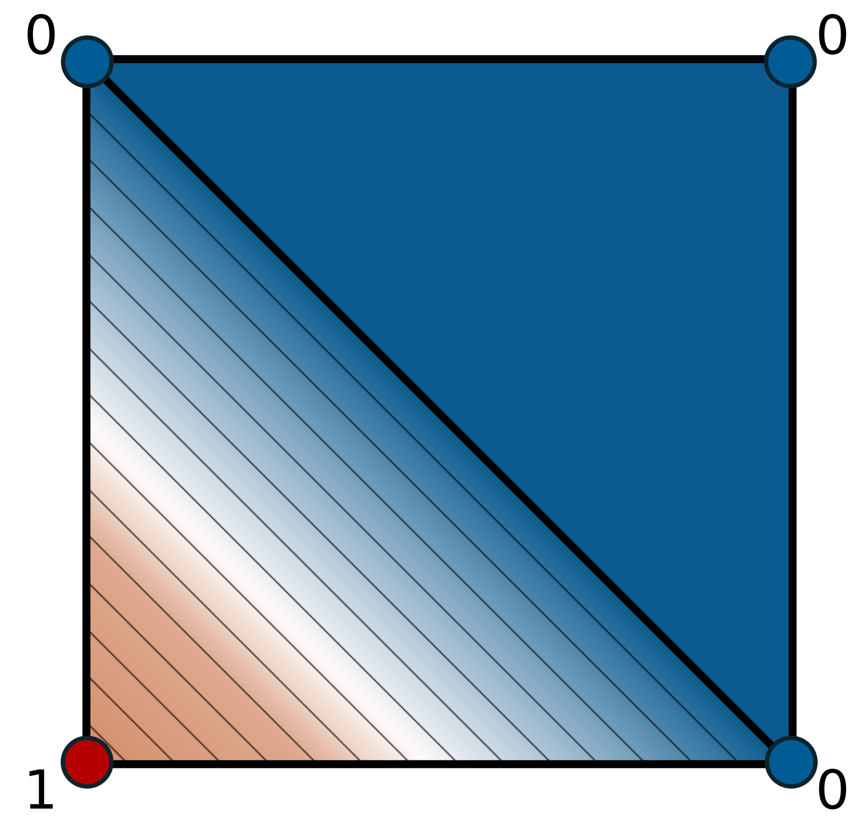


degrés de liberté

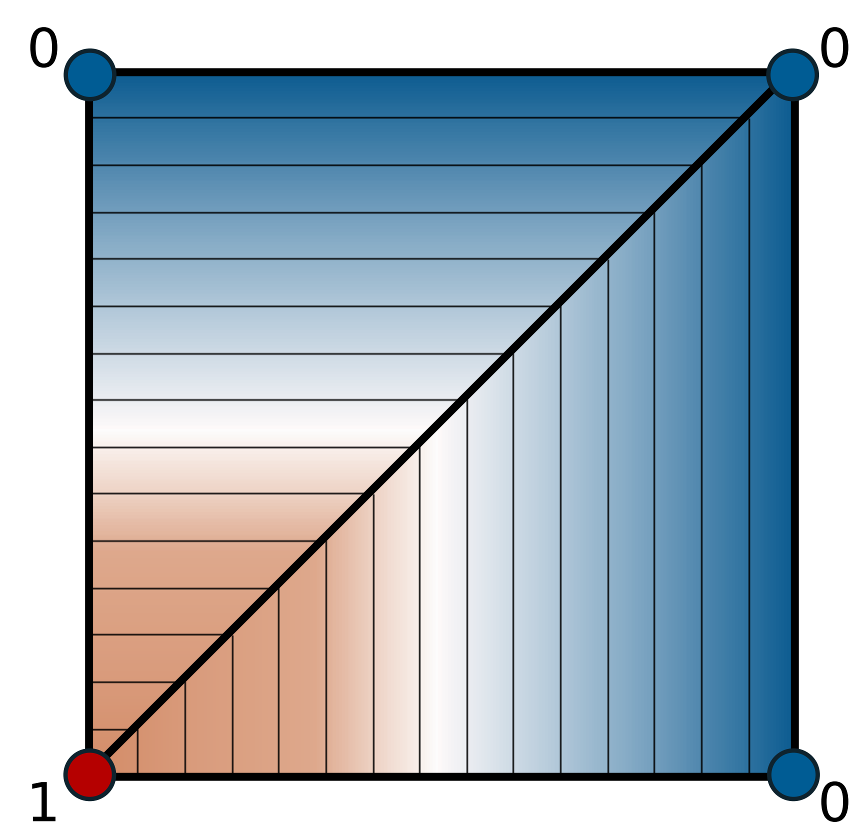


$\mathbb{Q}_1$
(fonction bilinéaire)

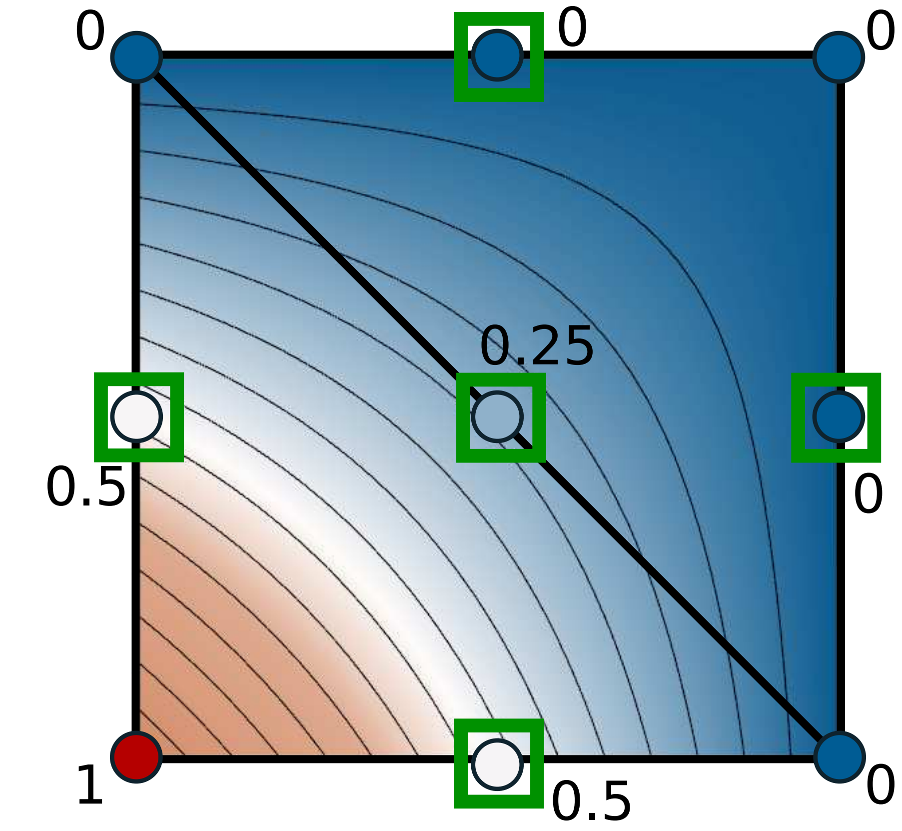
Le problème :



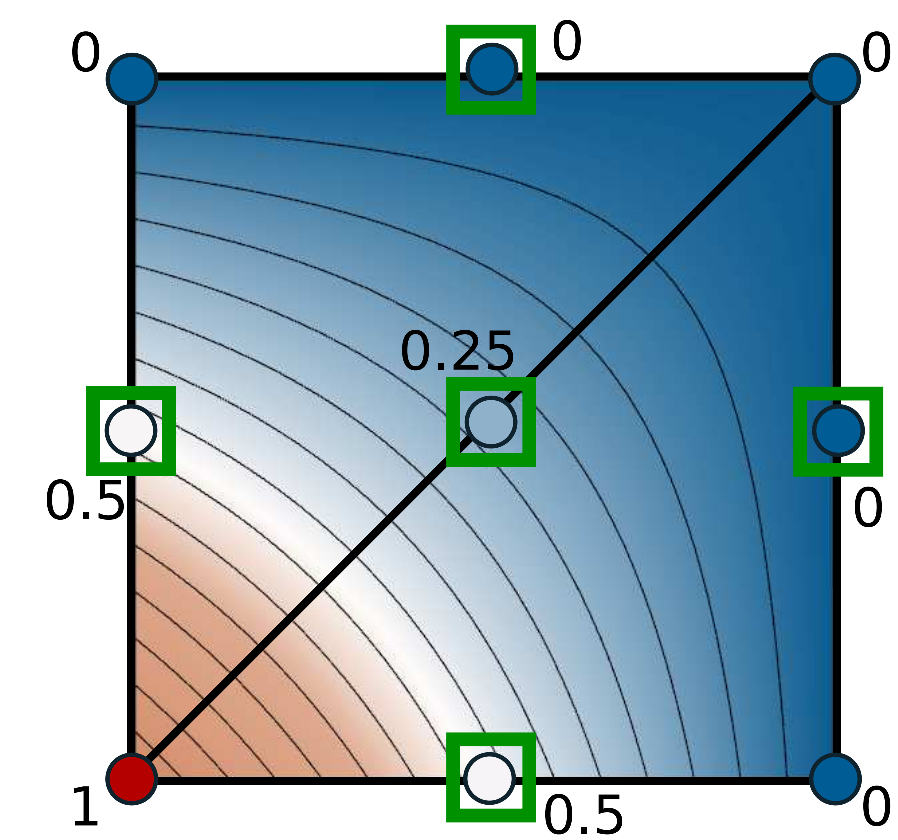
$\mathbb{P}_1$



Solution *[Reberol et Lévy '16]* :

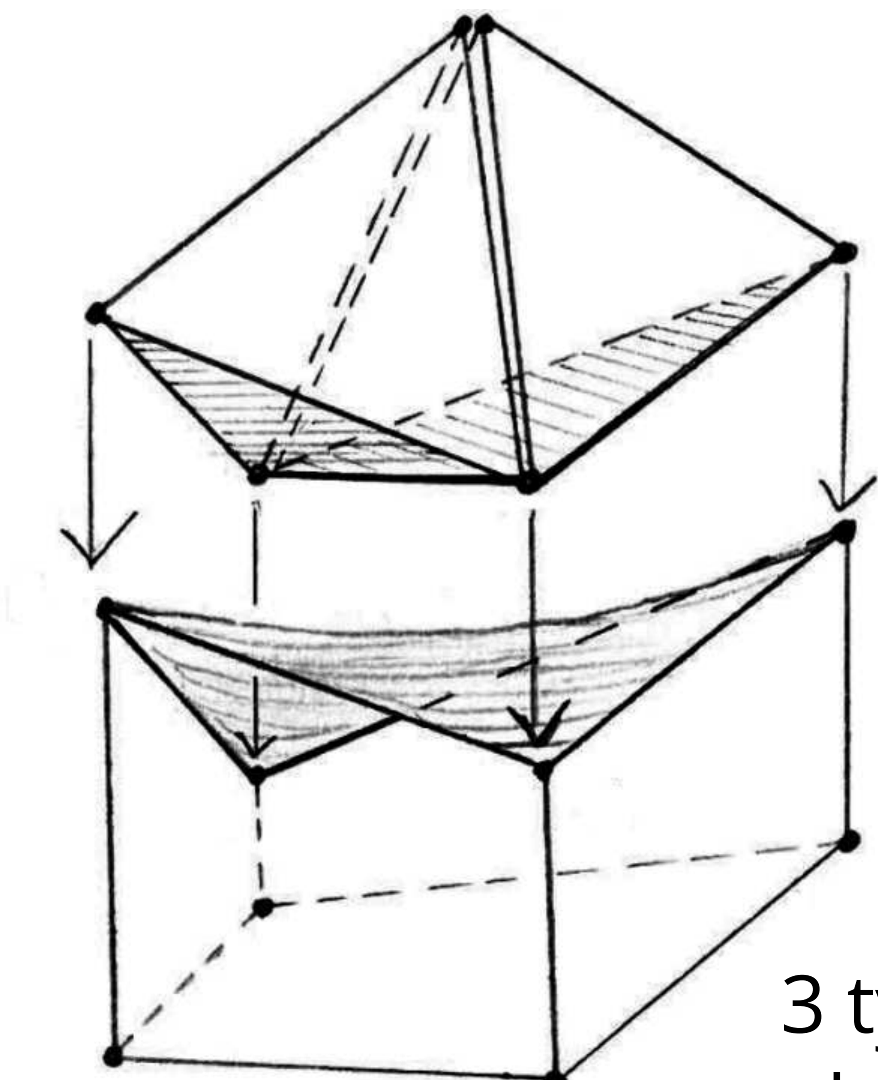


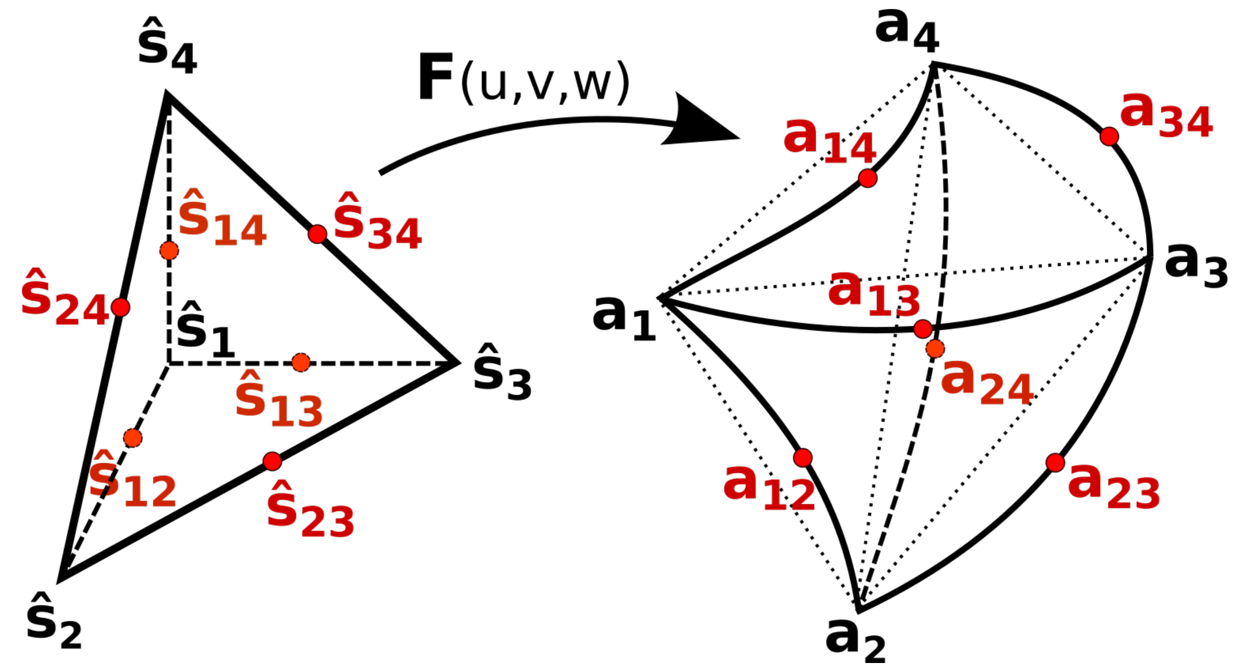
$\mathbb{P}_2$-contraint

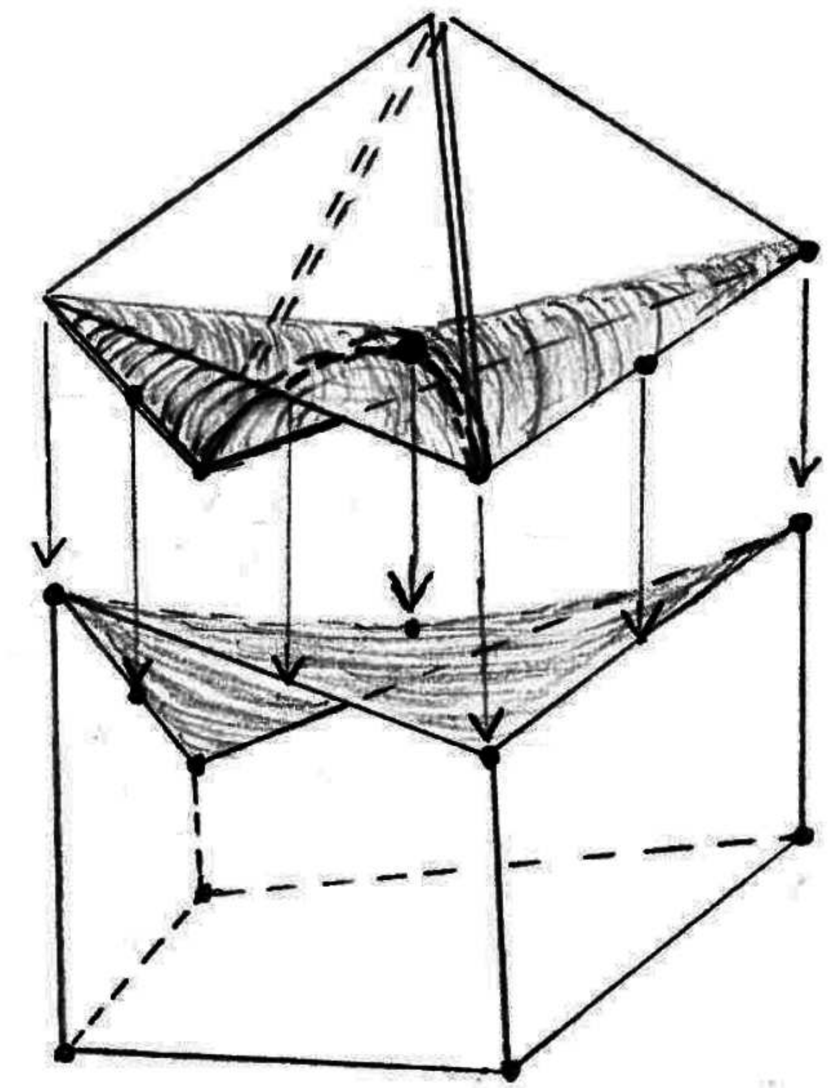


degrés de liberté

contrainte







3 types de transformations
- hex : tri-affine
- tet ordinaire : affine
- tet interface : quadratique

$$1$$
$$u \quad v$$
$$u^2 \quad uv \quad v^2$$

Reberol M. et Lévy B., Low-order continuous finite element spaces on hybrid non-conforming hexahedral-tetrahedral meshes, Rapport de recherche, 2016

Continuité des fonctions aux interfaces

Espaces d'interpolation locaux :

$$\mathbb{P}_k = \{p \text{ degré} \leq k\}$$

$$\boxed{\mathbb{Q}_k = \{p_x p_y p_z, \;\; p_\circ \text{ degré} \leq k\}}$$

Coefficients non-nuls (k = 2) :

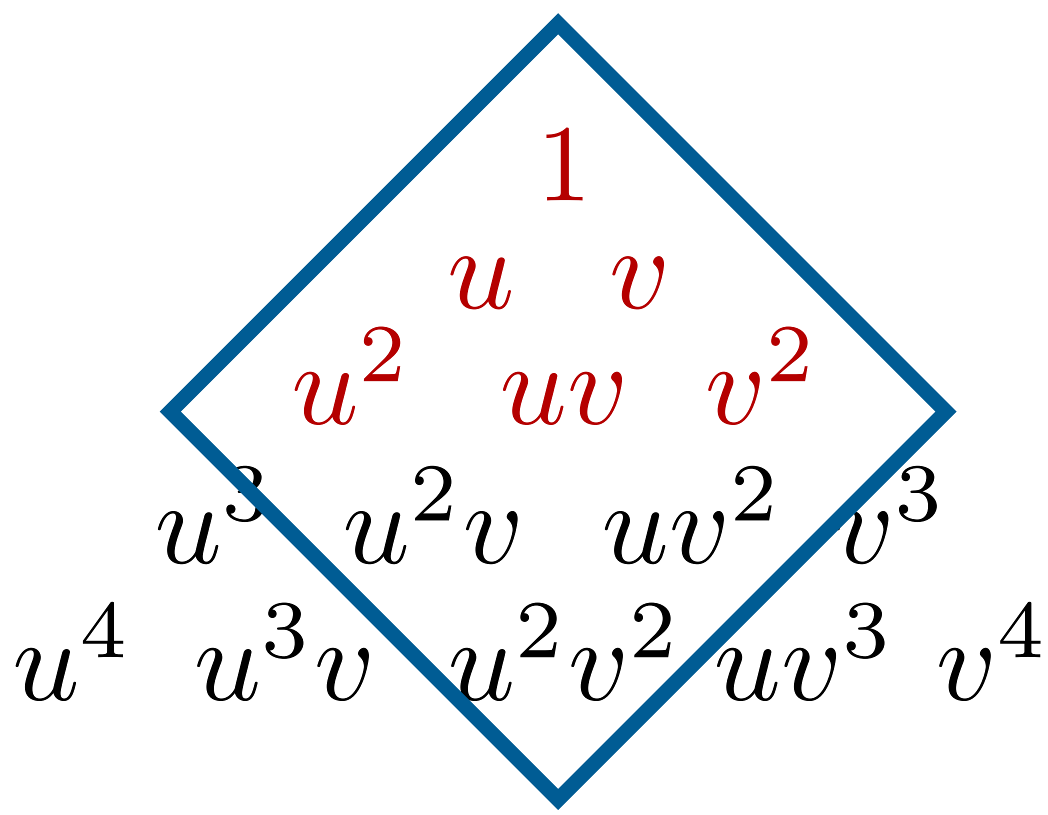
$$1$$
$$u \quad v$$
$$u^2 \quad uv \quad v^2$$
$$u^3 \quad u^2v \quad uv^2 \quad v^3$$
$$u^4 \quad u^3v \quad u^2v^2 \quad uv^3 \quad v^4$$

Espaces d'interpolation locaux :

$$\mathbb{P}_k = \{p \text{ degré} \leq k\}$$

$$\boxed{\mathbb{Q}_k = \{p_x p_y p_z,\ p_\circ \text{ degré} \leq k\}}$$

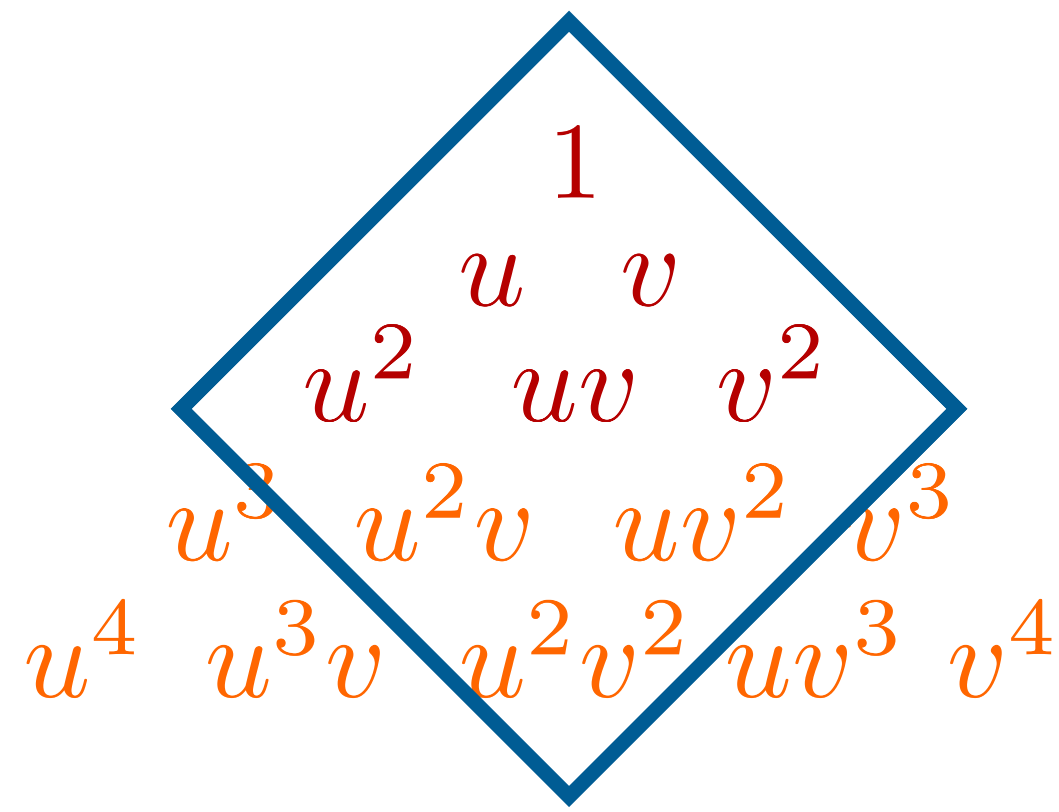
Coefficients non-nuls (k = 2) :



Solution : doubler le degré aux interfaces

tet interface : $\mathbb{P}_{2k}$

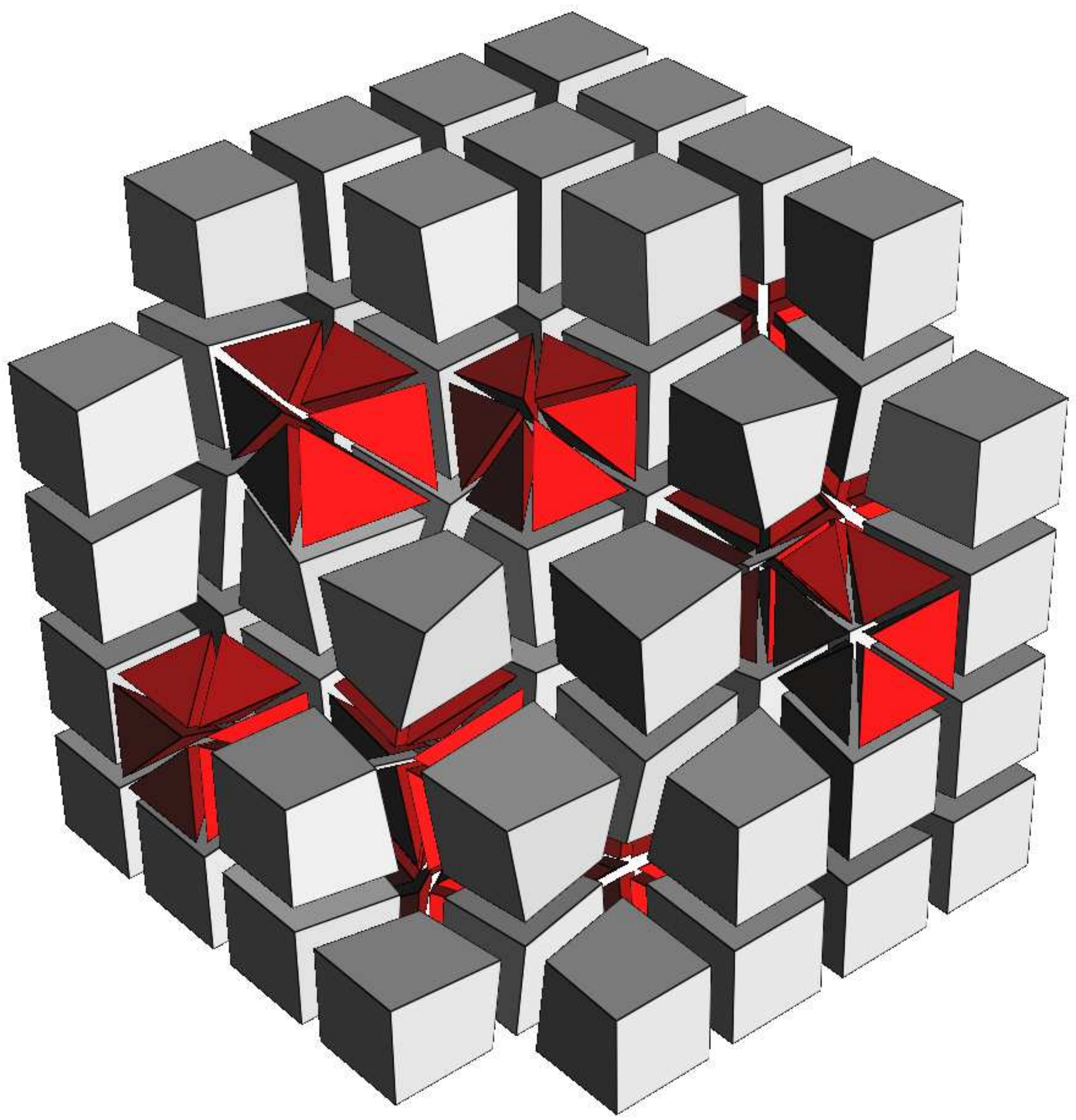
Coefficients non-nuls (k = 2) :

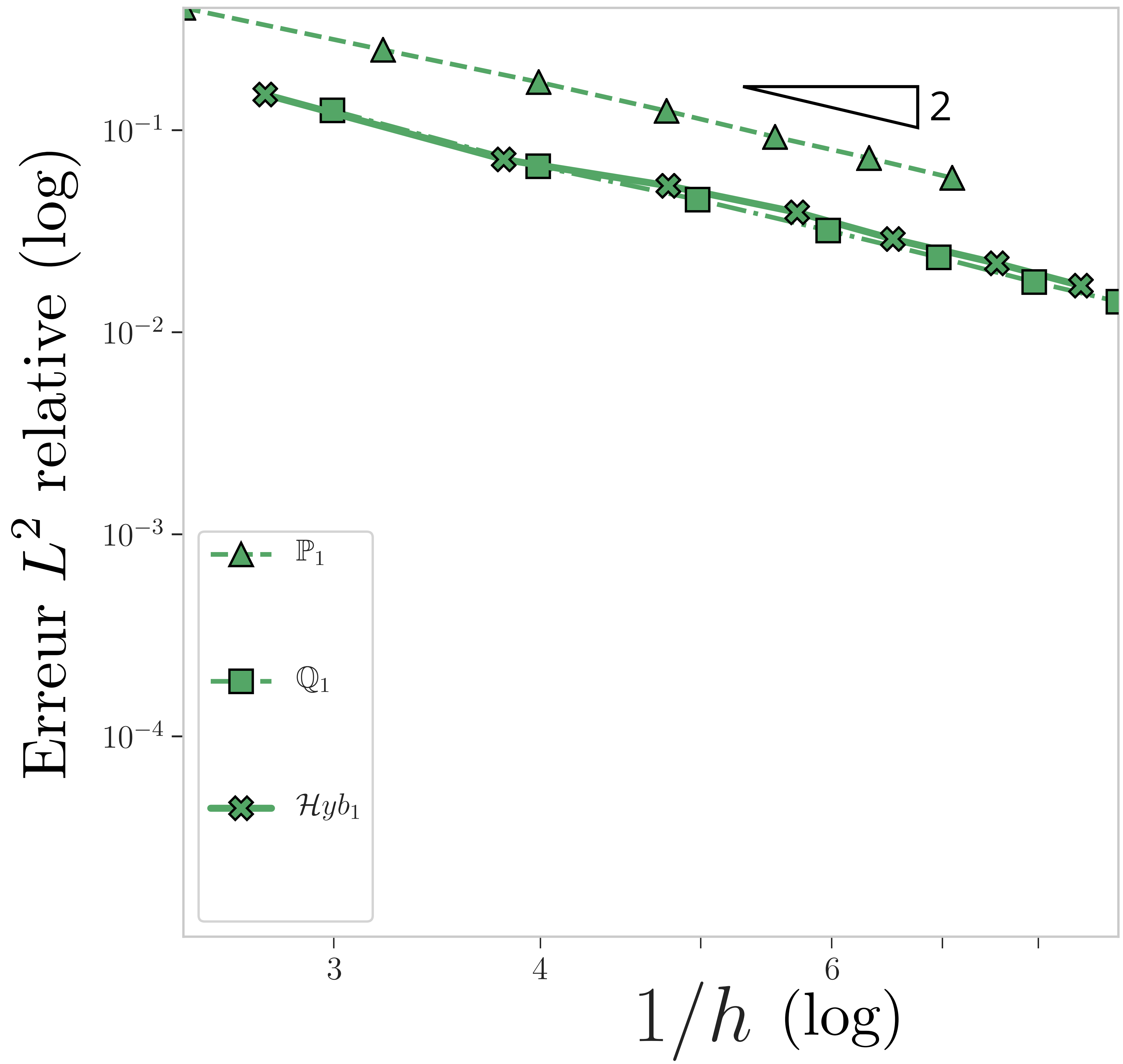


\+ Contraintes de continuité sur les faces et arêtes

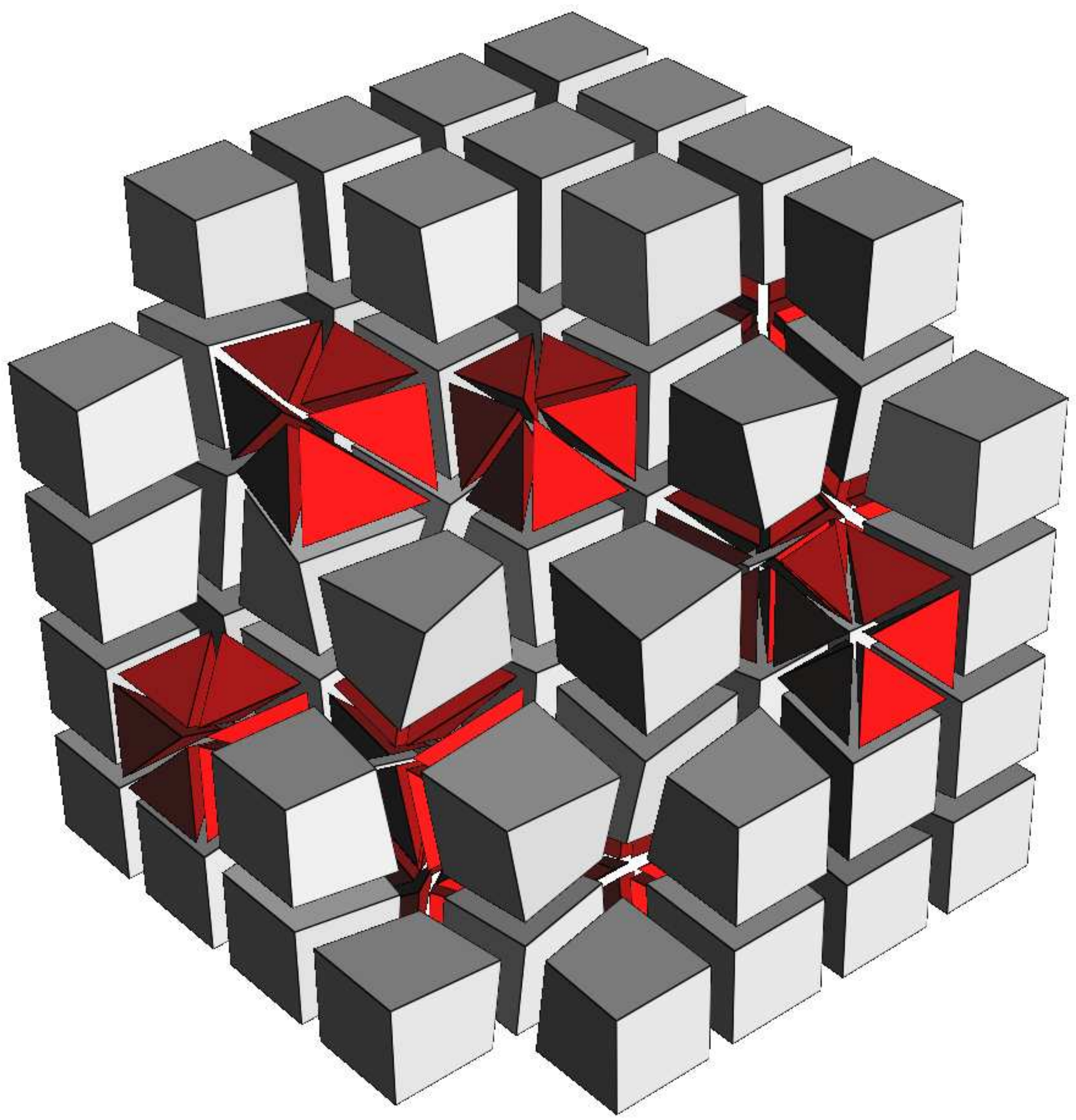
Reberol M. et Lévy B., Low-order continuous finite element spaces on hybrid non-conforming hexahedral-tetrahedral meshes, Rapport de recherche, 2016

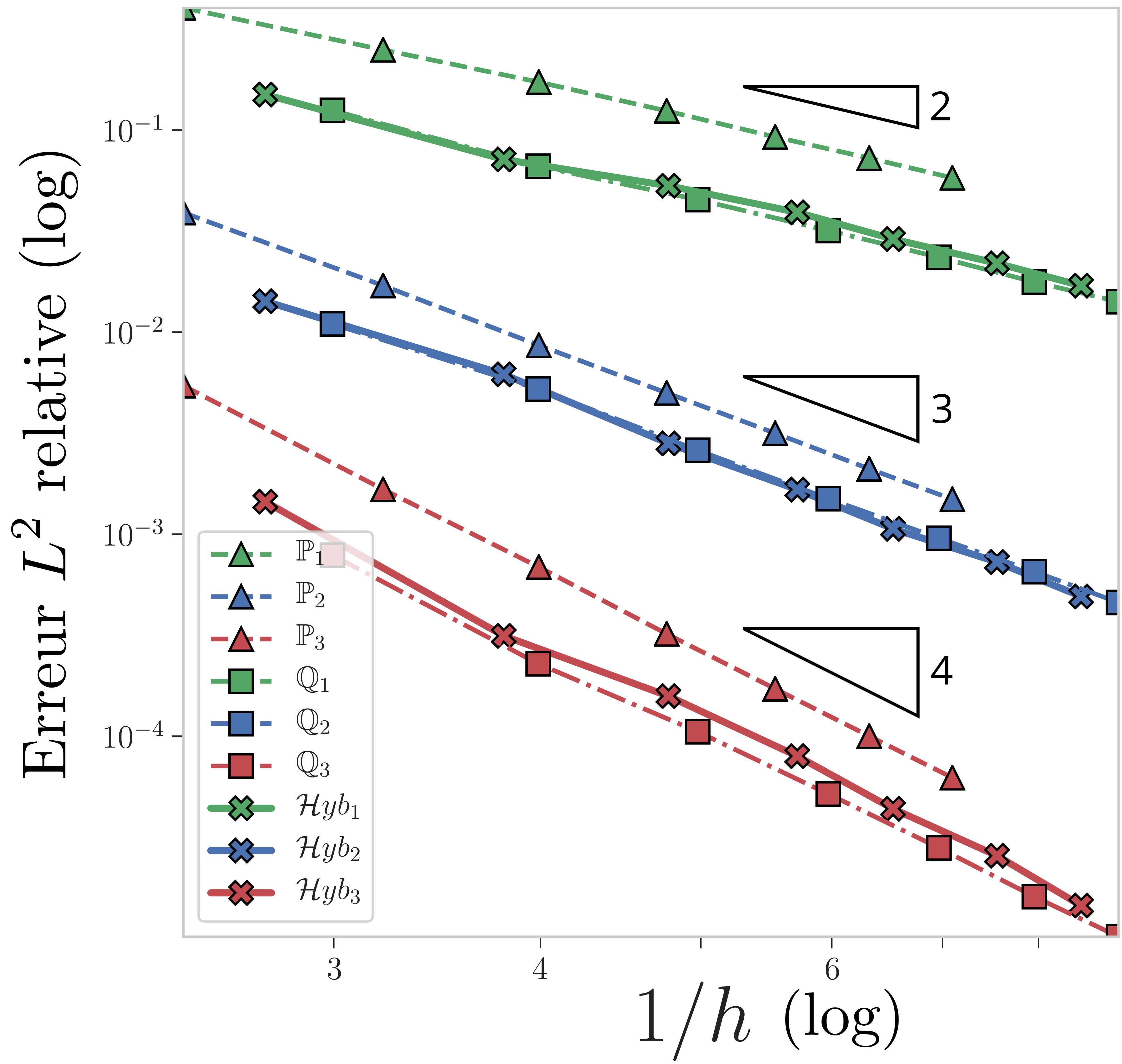
- Validation sur problème de Poisson avec solution analytique :



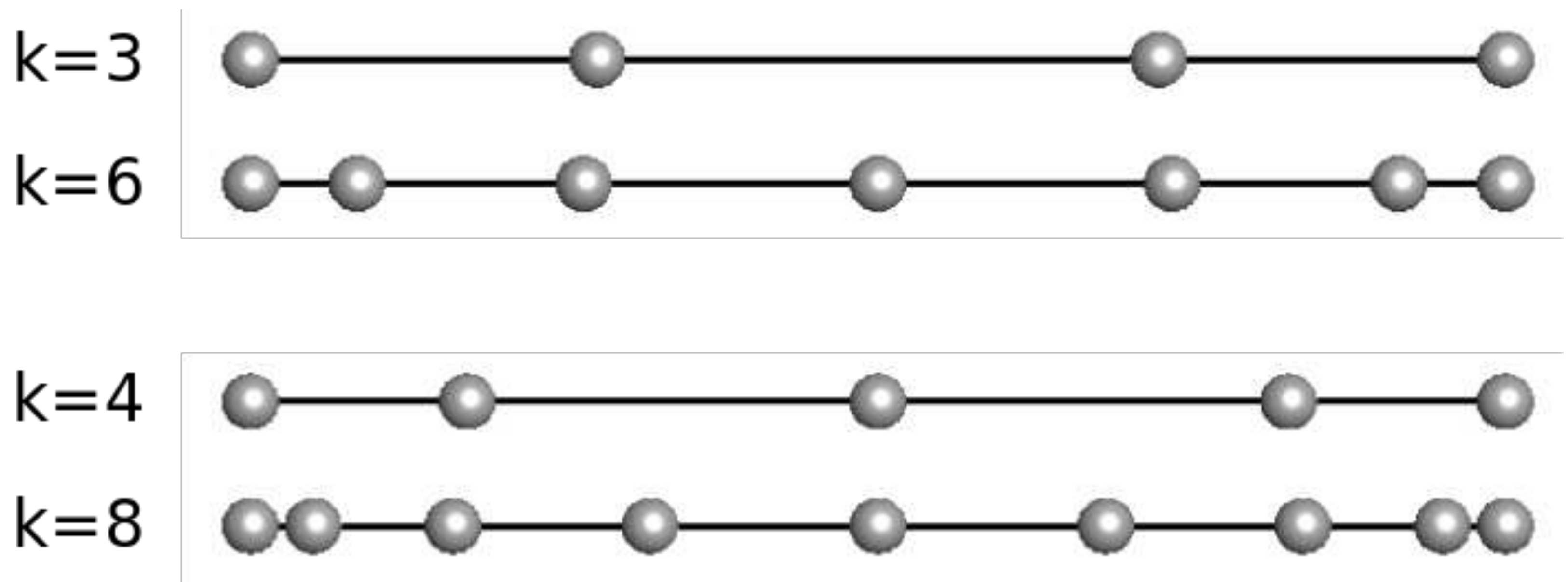


- Validation sur problème de Poisson avec solution analytique :





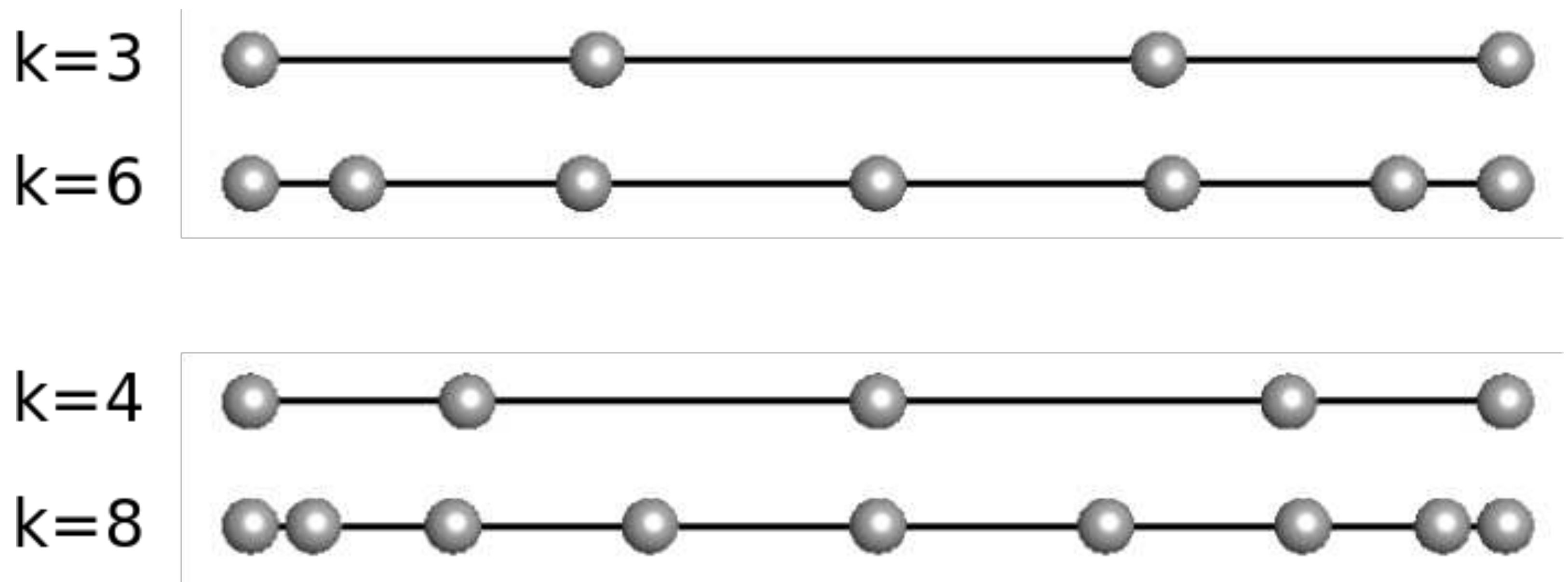
Contraintes de continuité :



Interface P_k - P_{2k} sur une arête

$$\{\text{GLL noeuds } k\} \not\subset \{\text{GLL noeuds } 2k\}$$

Contraintes de continuité :



Interface P_k - P_{2k} sur une arête

$$\{\text{GLL noeuds } k\} \not\subset \{\text{GLL noeuds } 2k\}$$

Implémentation :

Problème non contraint :

$$Ax = b$$

Problème contraint (solution continue) :

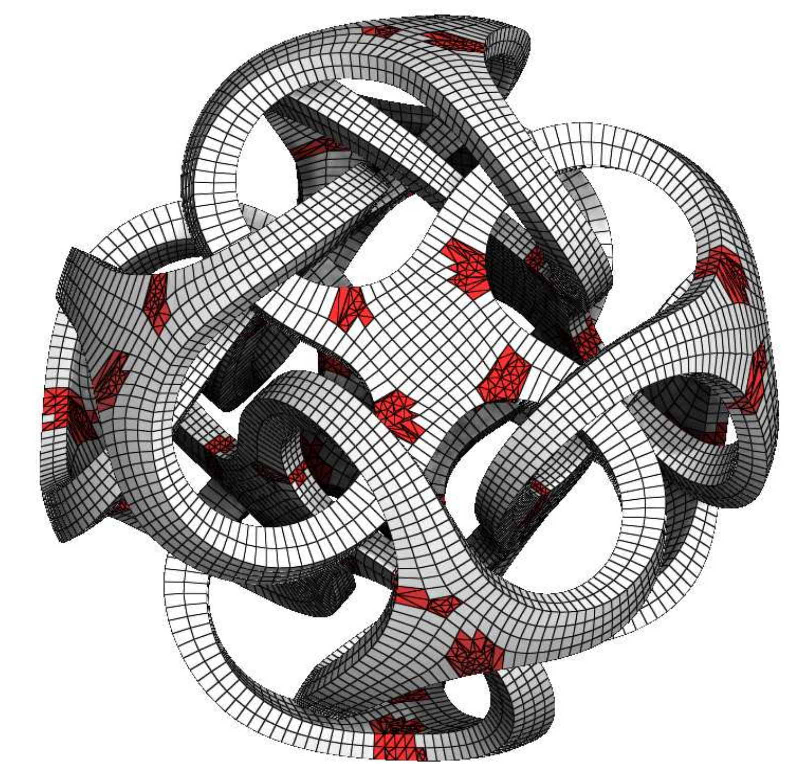
$$x_{nc} = P\ x_c$$

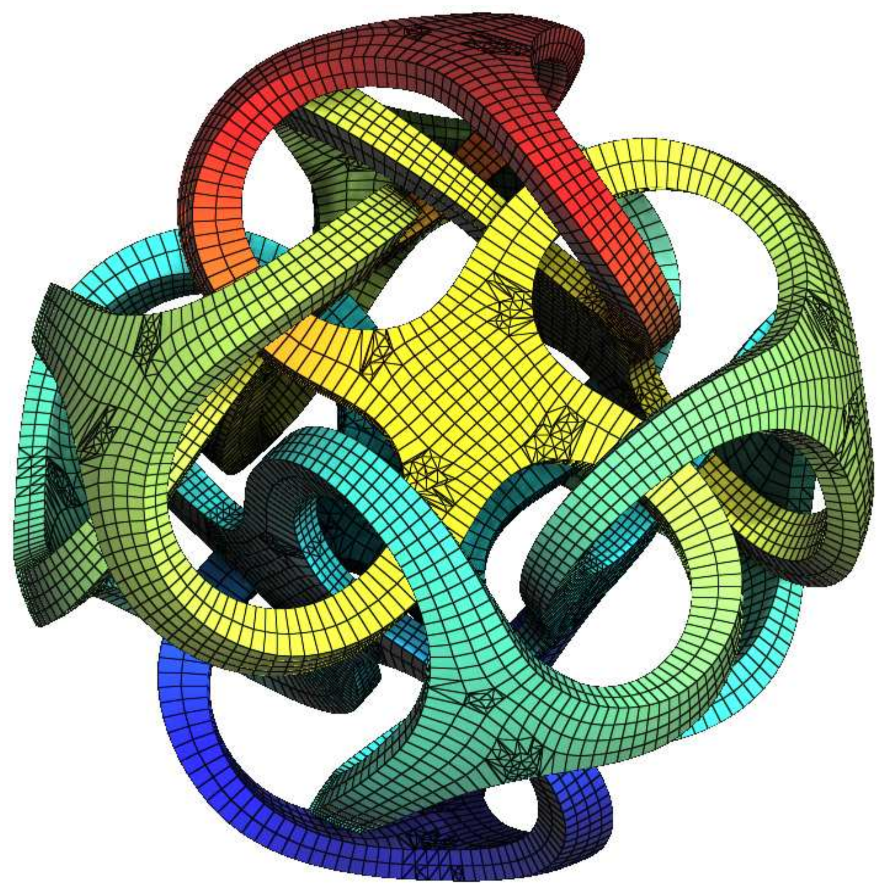
$$P^T AP\ x = P^T b$$

Beaucoup de contraintes linéaires pour la continuité sur les faces et arêtes

Similaire à FEM non-conforme avec noeuds flottants

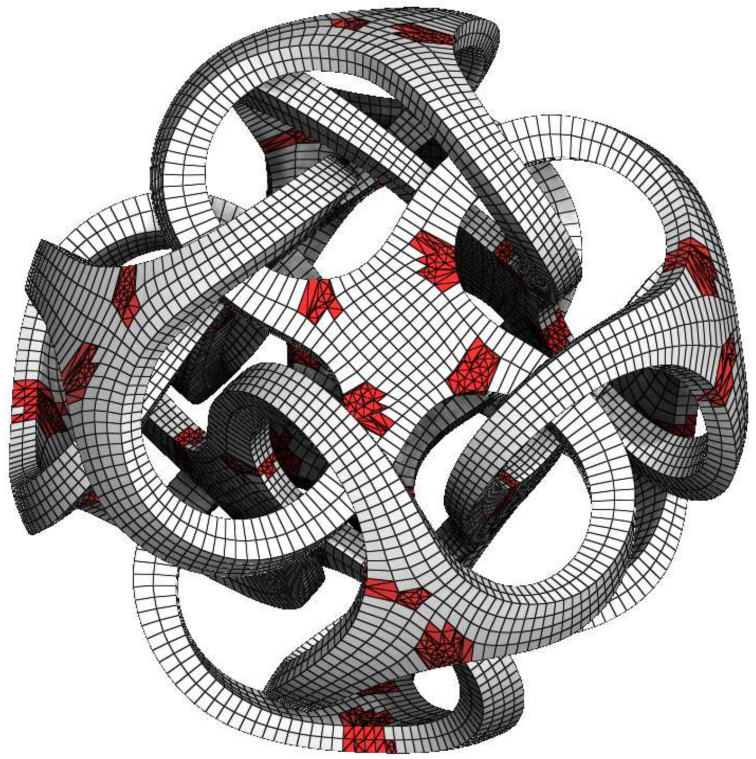
- Bilan :
  - implementation fonctionne mais compliquée
  - difficile à ajouter dans une librairie existante

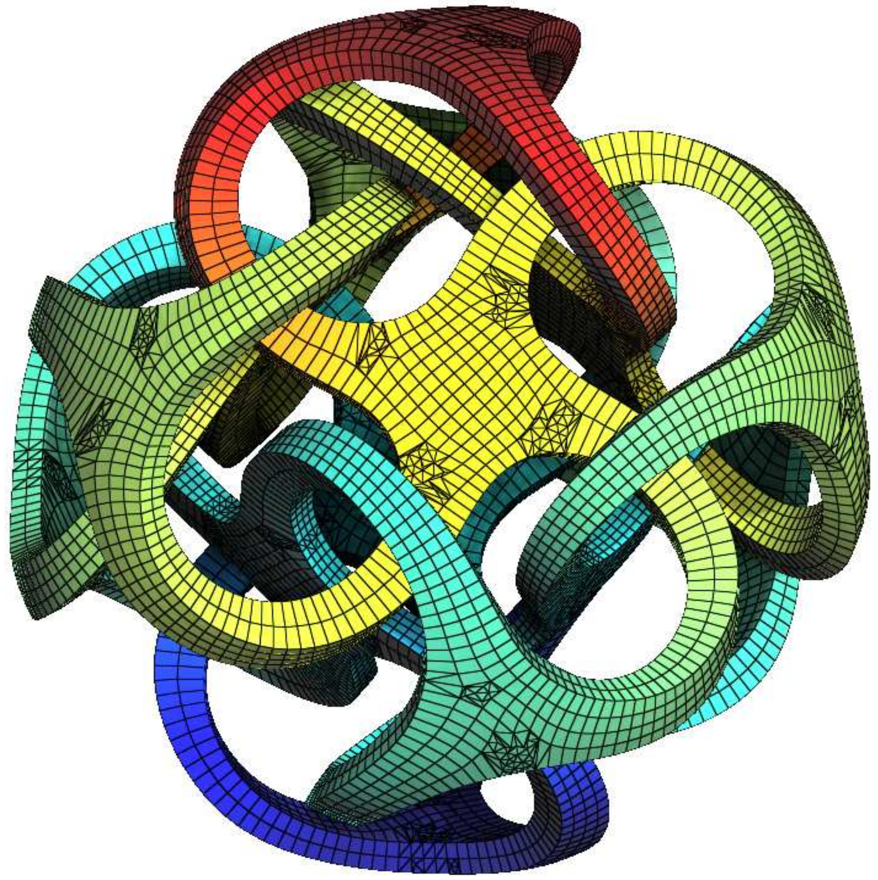


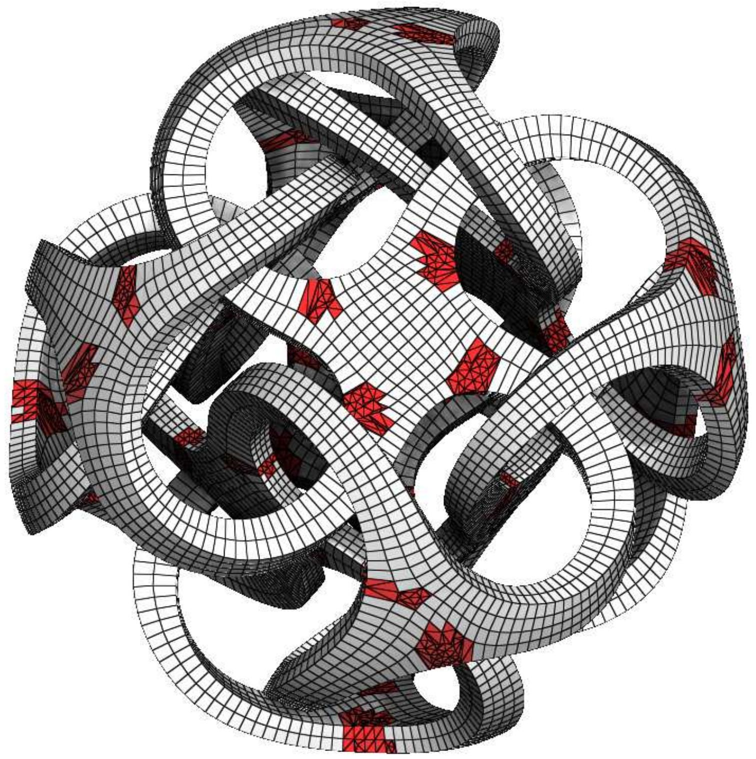


- Bilan :
  - implementation fonctionne mais compliquée
  - difficile à ajouter dans une librairie existante

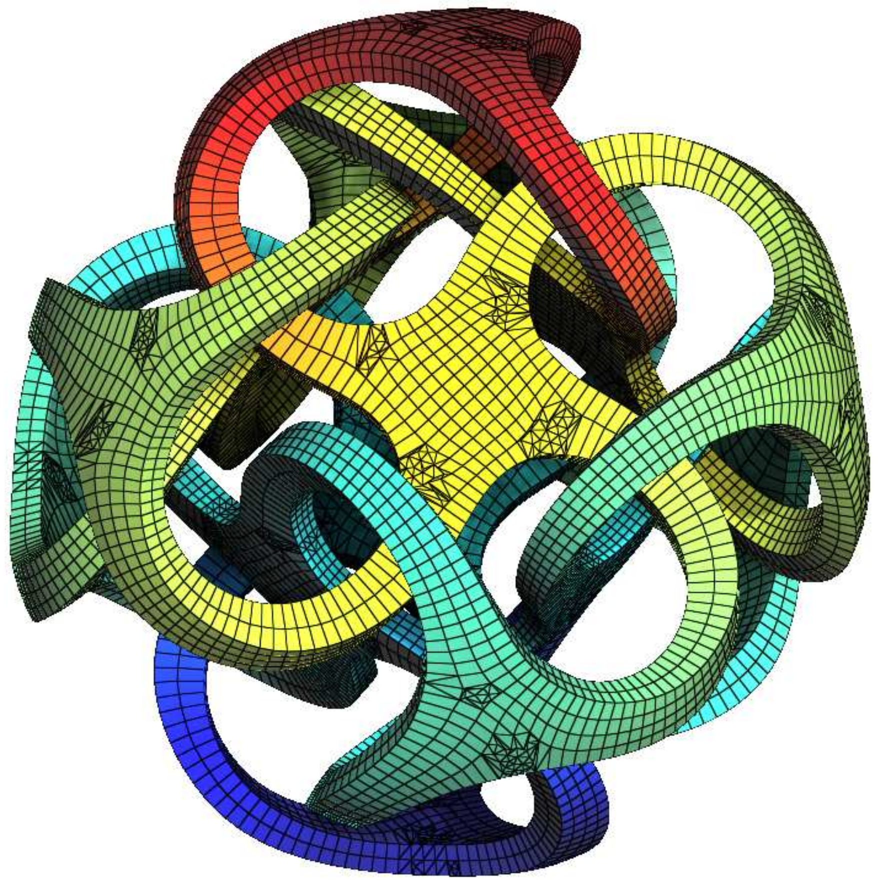
- Choix plus naturel et simple :
  - utiliser des pyramides (assemblage standard)



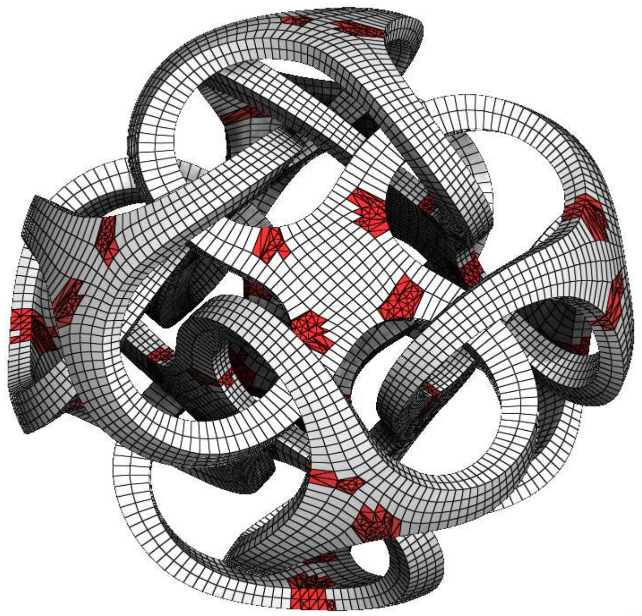




- Bilan :
  - implementation fonctionne mais compliquée
  - difficile à ajouter dans une librairie existante
- Choix plus naturel et simple :
  - utiliser des pyramides (assemblage standard)
- Alternatives :
  - espace d'approximation non-conforme (DG, Nitsche)
  - polyèdres (éléments finis virtuels)



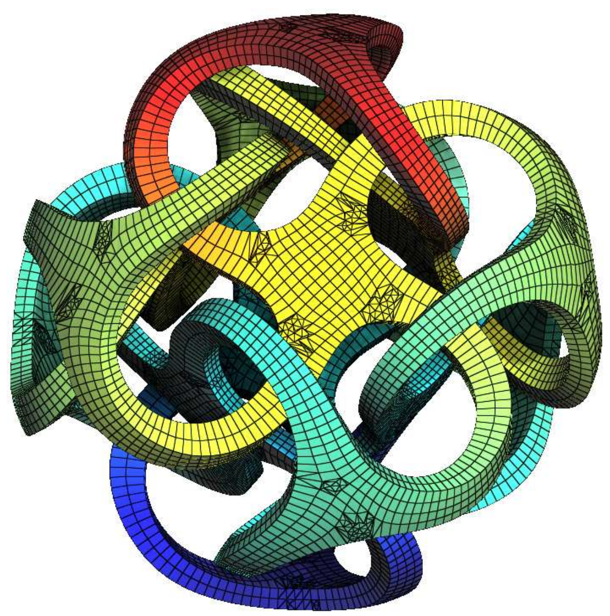
Sommaire



I. Génération de maillage hex-dominants

ALICE : mailleur hex-tet

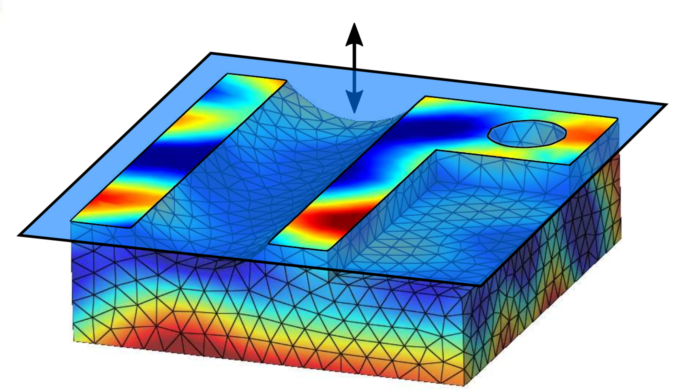
contribution : maillage robuste *[Ray, Sokolov, **Reberol**, Ledoux, Levy '18]*



II. Éléments finis sur maillages hex-tet

contribution : espace continu $\mathcal{H}yb_k\ (\mathbb{Q}_k, \mathbb{P}_{2k}, \mathbb{P}_k)$

*rapport [**Reberol** et Lévy '16]*



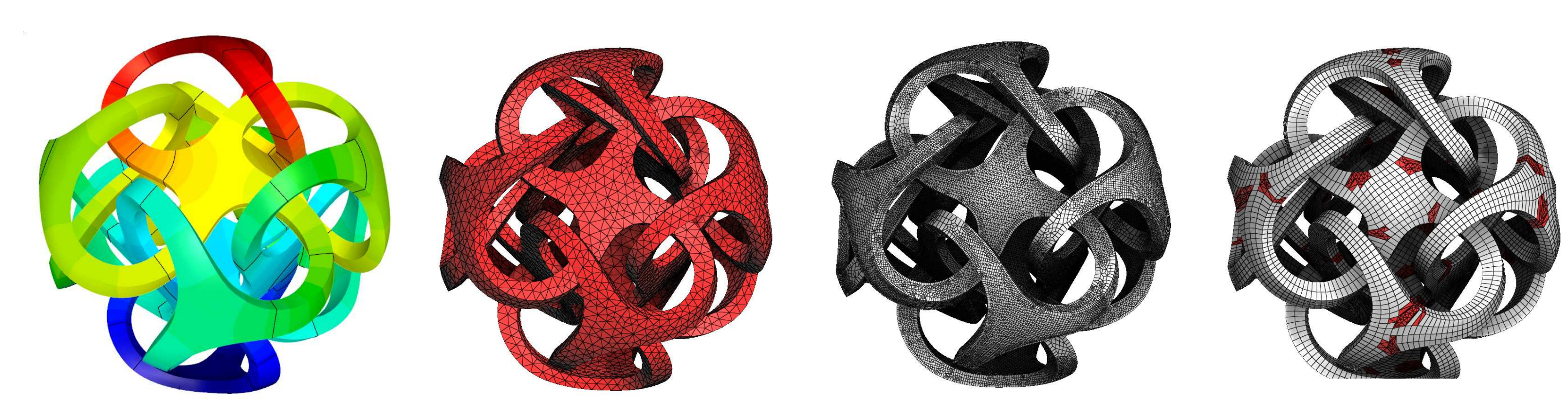
$||u_h - u_{ref}||$

III. Méthode d'évaluation

contribution : calcul de distance efficace

*article [**Reberol** et Lévy '18]*

IV. Comparaisons de solutions



- Objectif : évaluer l'influence du maillage sur l'erreur d'approximation

1. Solution analytique connue

   - calcul de l'erreur (L^2, H^1) par intégration numérique (quadratures)

- Objectif : évaluer l'influence du maillage sur l'erreur d'approximation

1. Solution analytique connue

- calcul de l'erreur (L^2, H^1) par intégration numérique (quadratures)

- problèmes construits avec la *Méthode des solutions manufacturées* :

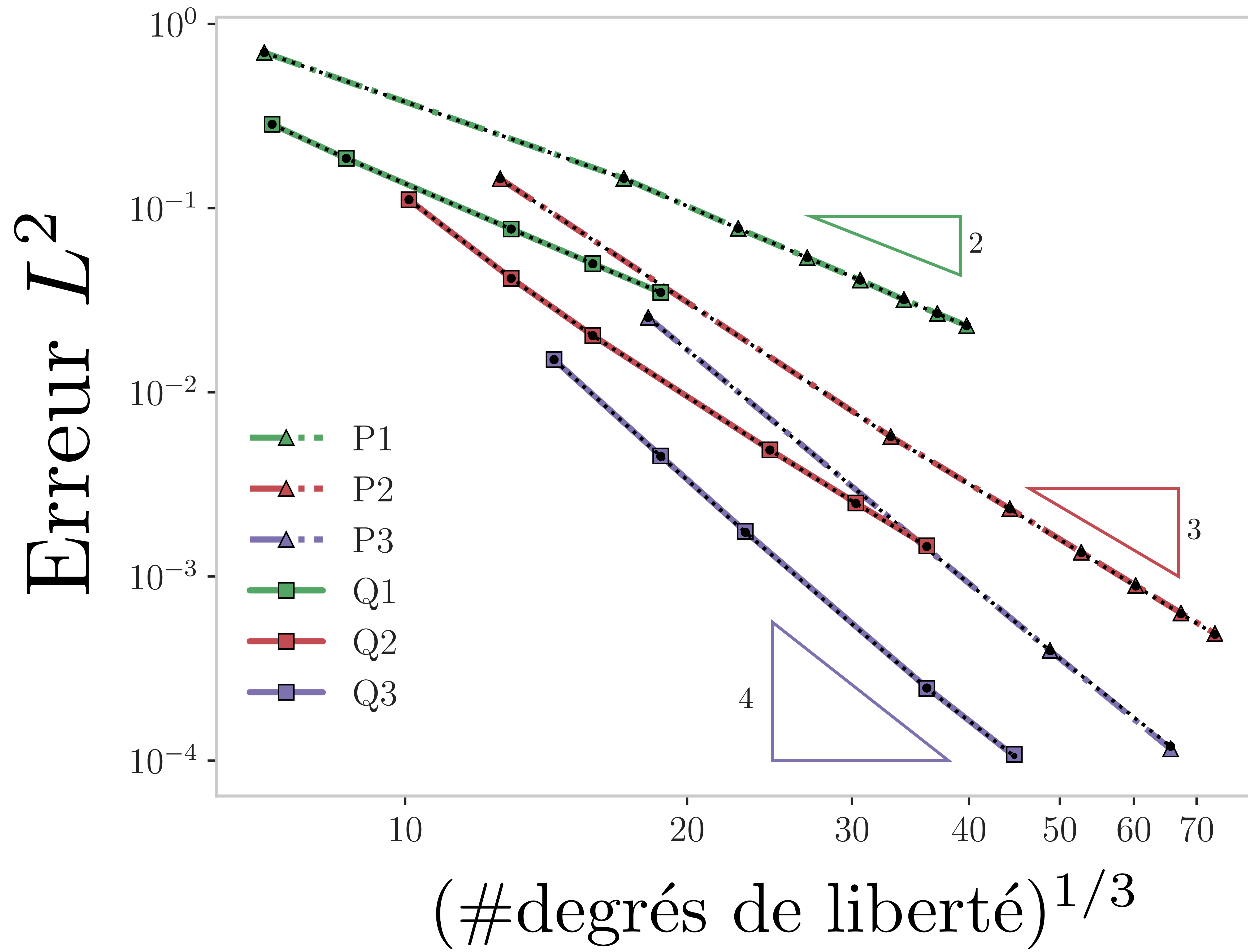
a) choisir une solution analytique $u(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$

b) l'injecter dans le problème (domaine + EDP) $-\Delta u = f$

c) calculer les formules du terme source et C.L. $f(x,y) = 4\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$

Vérification de code : *[Salari et al. '00, Roache et al. '02]*

Avec solution analytique : erreur en fonction du nombre d'inconnues, de la résolution du maillage, du temps de calcul, etc



Évaluation de résultats FEM avec solution analytique

Résultats non représentatifs de problèmes réels :

- domaines très simples (souvent carré ou cube unité)

Résultats non représentatifs de problèmes réels :

- domaines très simples (souvent carré ou cube unité)

- terme source analytique, proche de la solution
  problèmes réels : terme source nul ou constant

$$-\Delta u = f$$

$$f(x,y) = 4\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$
$$u(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

- peu de propagation depuis les bords

Résultats non représentatifs de problèmes réels :

- domaines très simples (souvent carré ou cube unité)

- terme source analytique, proche de la solution
  problèmes réels : terme source nul ou constant

$$-\Delta u = f \qquad \begin{aligned} f(x,y) &= 4\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) \\ u(x,y) &= \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) \end{aligned}$$

- peu de propagation depuis les bords

- terme source et C.L. analytiques, donc approximés par la discrétisation
  erreur en partie due à l'approximation du problème

2. Pas de solution analytique : comparer à une solution de référence

- si applications spécifiques, observer quantités d'intérêt avec raffinement (par ex. : contrainte maximale, coefficient de traînée, modes propres)

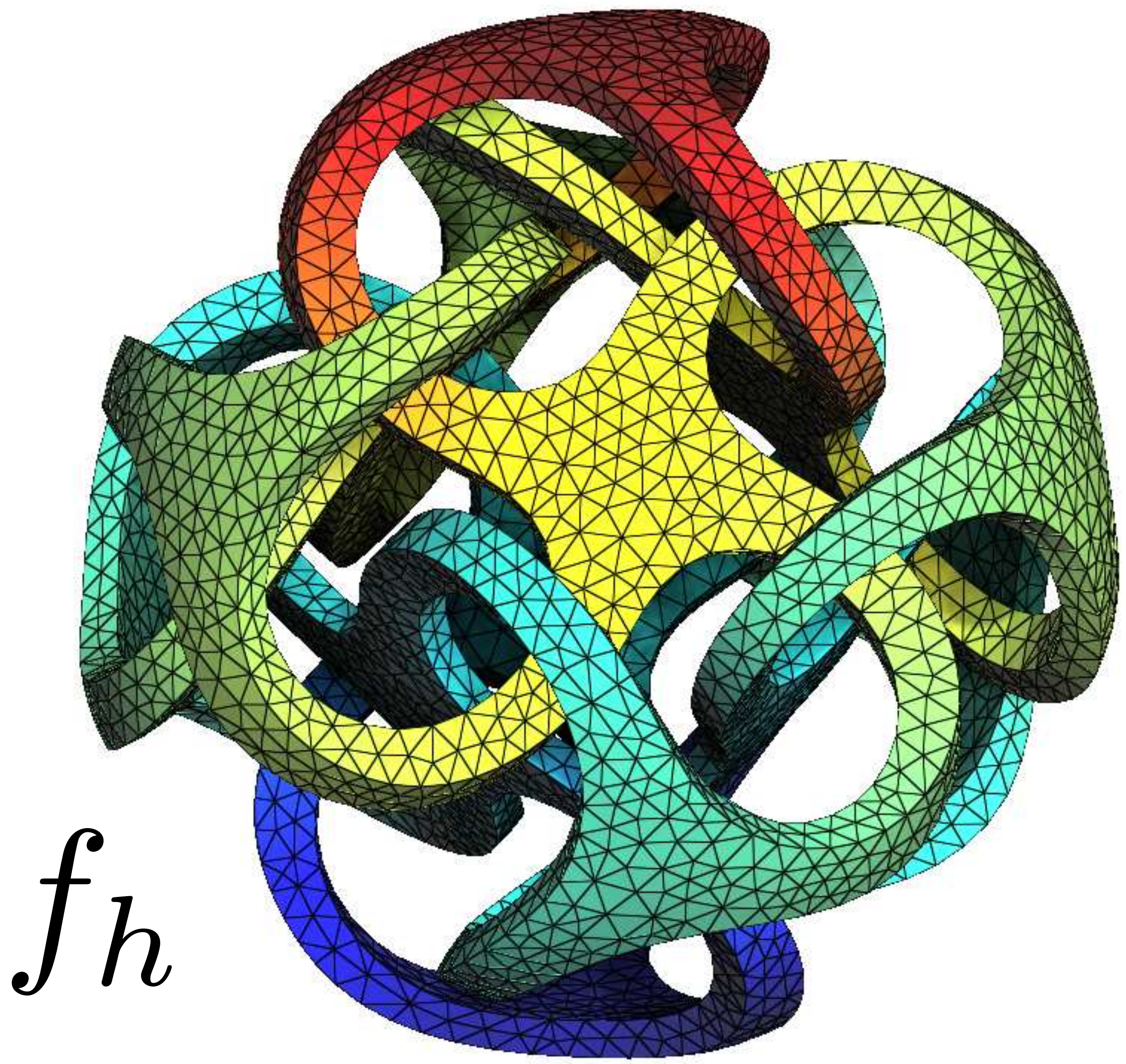
2. Pas de solution analytique : comparer à une solution de référence

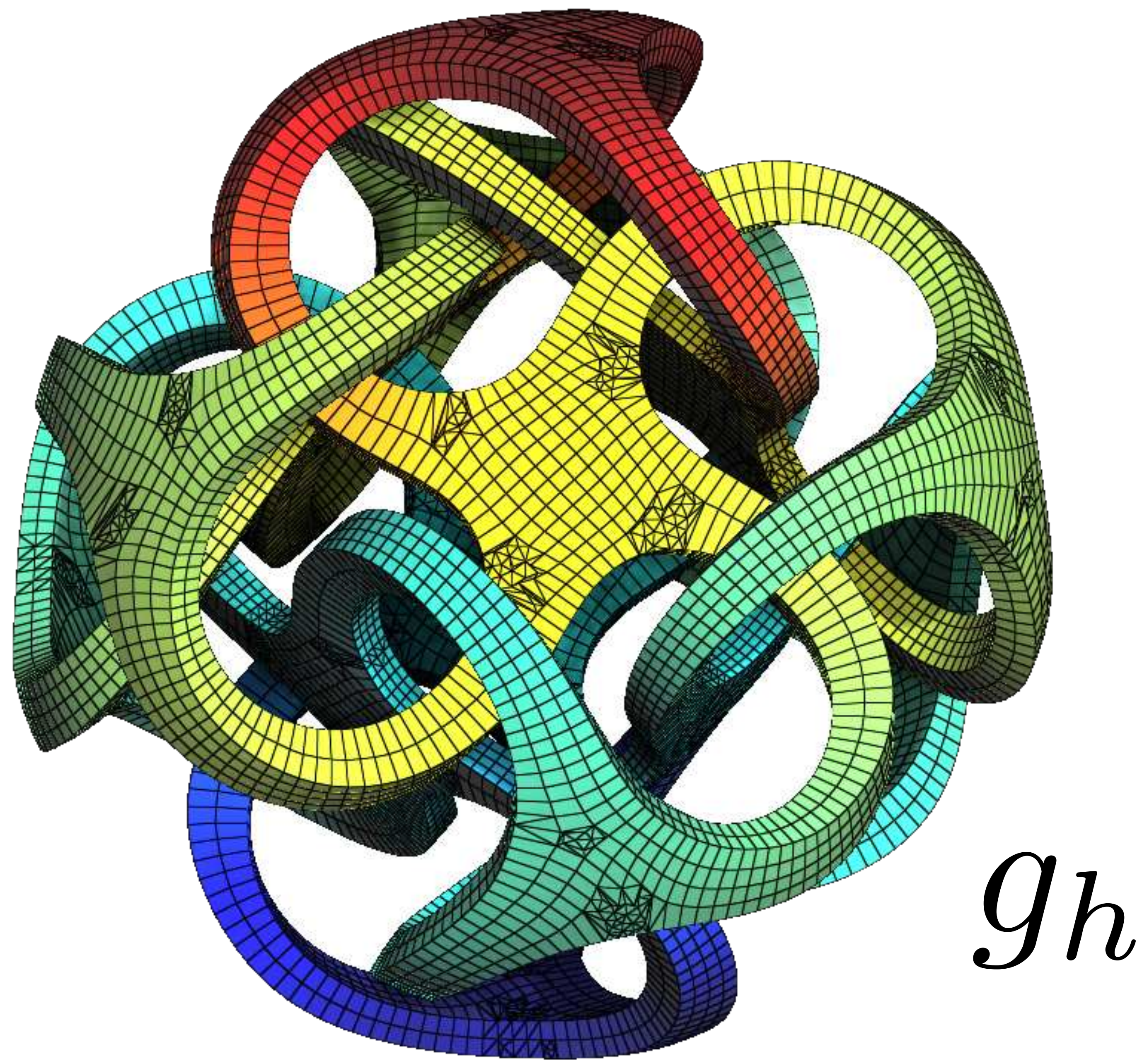
- si applications spécifiques, observer quantités d'intérêt avec raffinement (par ex. : contrainte maximale, coefficient de traînée, modes propres)

- cas général : approximer l'erreur par une distance à la solution de référence

$$||u_h - u_{\text{exact}}|| \approx ||u_h - u_{\text{ref}}||$$

nouveau problème : comment calculer efficacement cette distance ?





$$||f_h - g_h||_{L^2} = \sqrt{\int_\Omega (f_h - g_h)^2} \quad ?$$

Intégrales remplacées par des sommes pondérées :

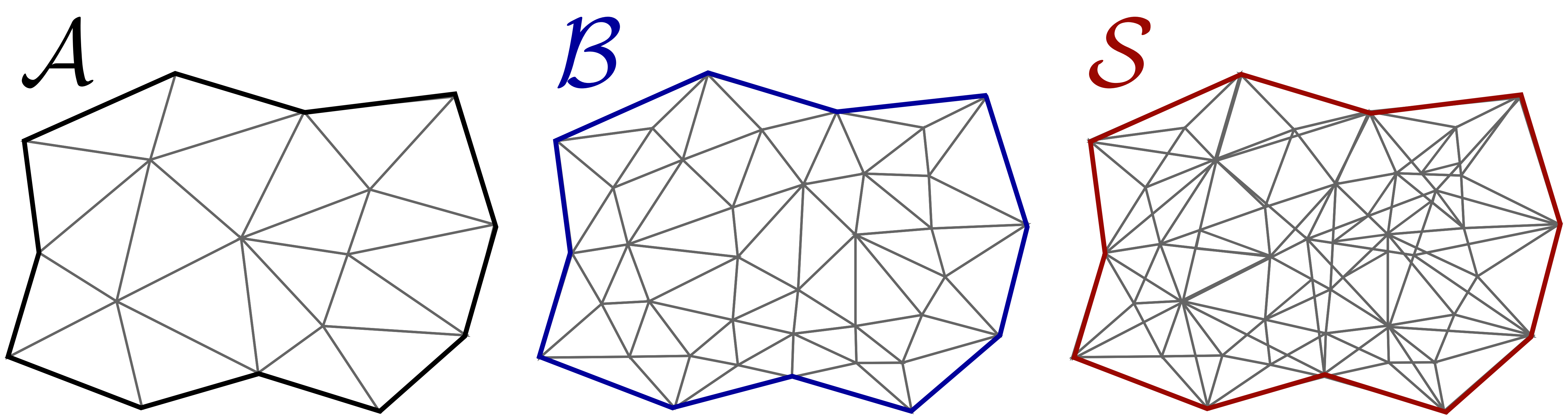
$$(||f_h - g_h||_{L^2})^2 = \int_\Omega (f_h - g_h)^2 \approx \sum_{i=1}^{N} w_i (f_h(x_i) - g_h(x_i))^2$$

Calcul de distance entre solutions éléments finis

Intégrales remplacées par des sommes pondérées :

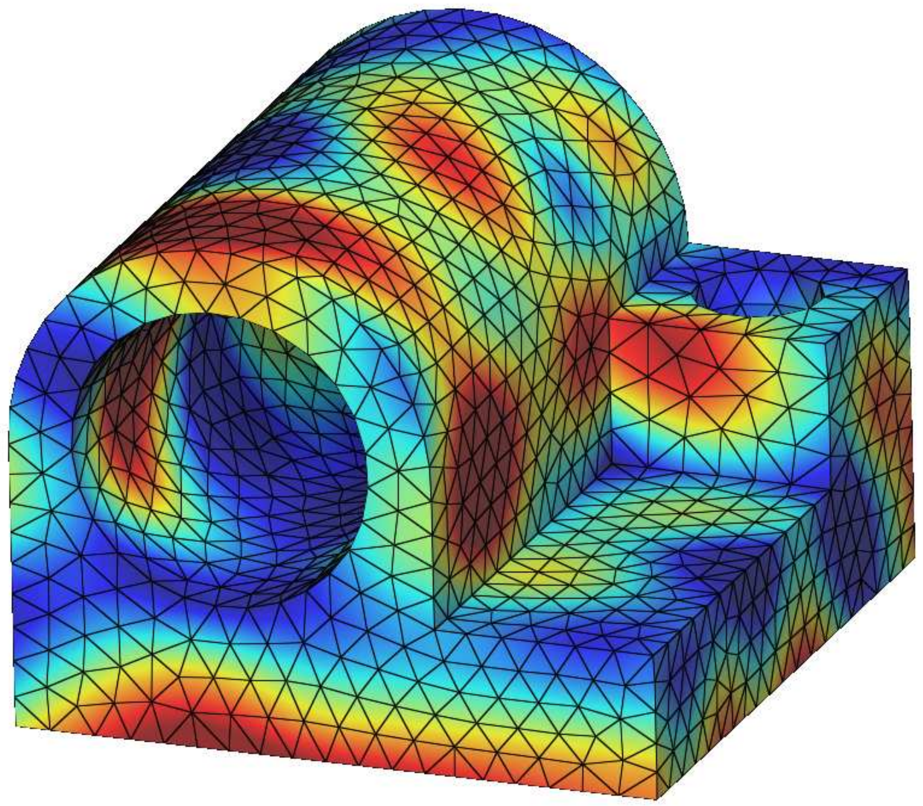
$$(||f_h - g_h||_{L^2})^2 = \int_\Omega (f_h - g_h)^2 \approx \sum_{i=1}^{N} w_i (f_h(x_i) - g_h(x_i))^2$$

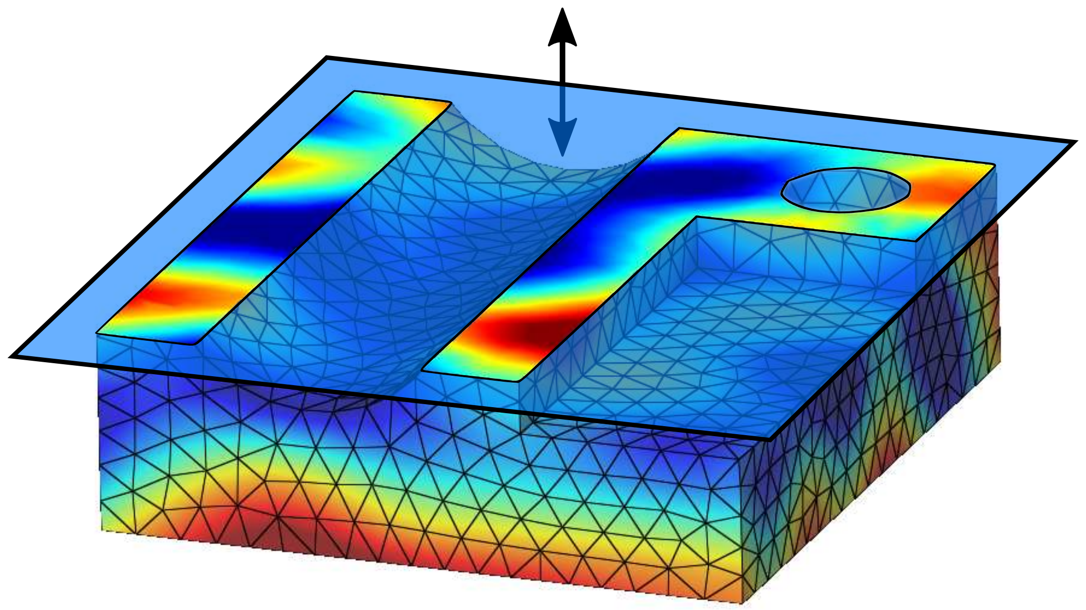
Quadratures (FEM) : besoin d'un maillage

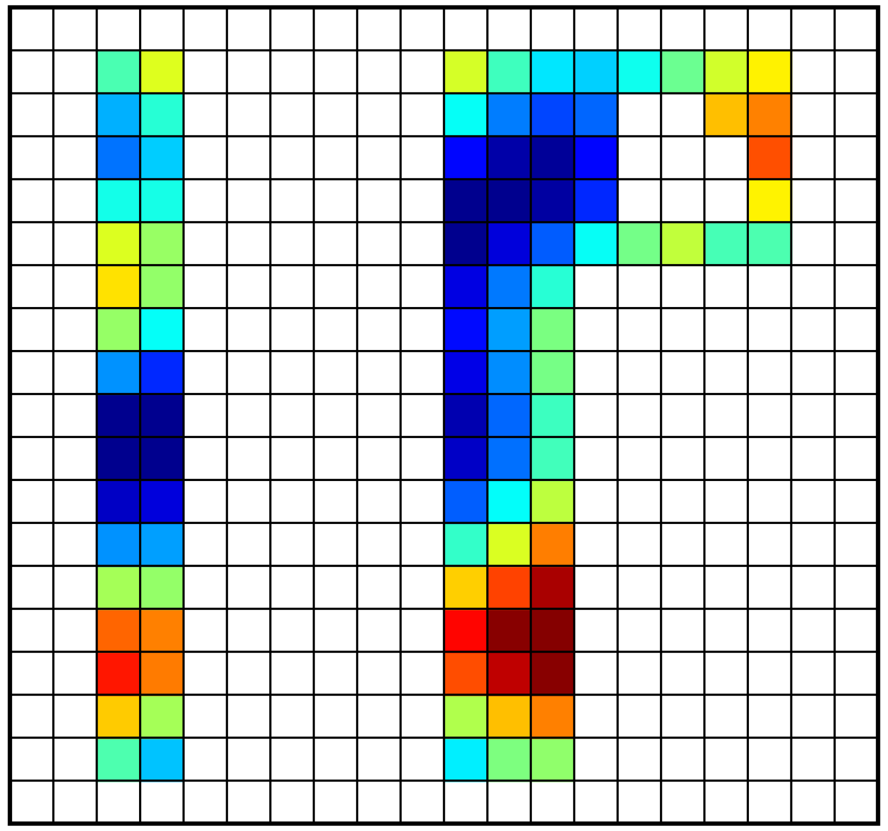


Références :
[Plimpton et al. '98]
[Jiao et Heath '04]
[Farrell et al. '09]

Idées :
- échantillonage des deux champs sur une grille commune
- tranche par tranche
- efficace grâce aux algorithmes d'informatique graphique



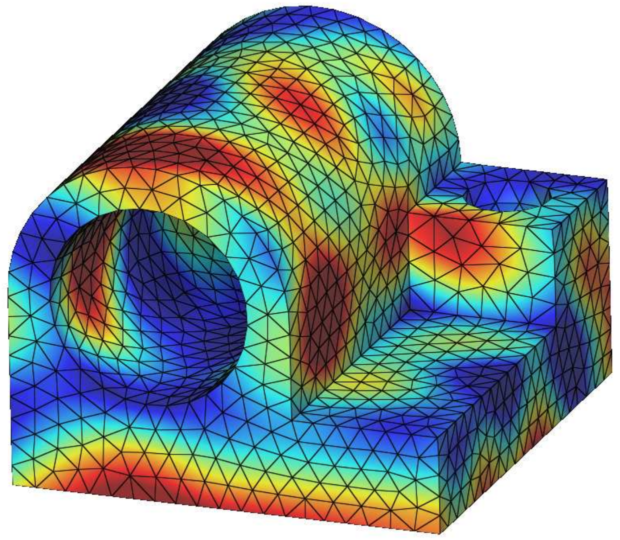




Reberol M. et Lévy B., *Computing the Distance between Two Finite Element Solutions Defined on Different 3D Meshes on a GPU*, SIAM Journal on Scientific Computing, *2018*

1. Initialisation

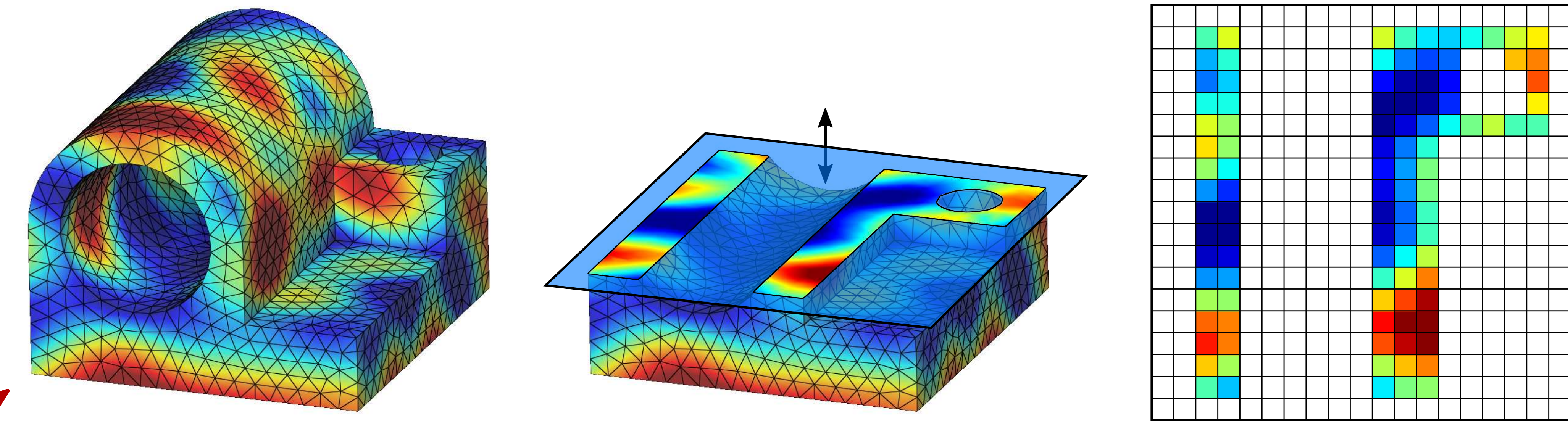
(transfert données sur GPU)



Échantillonnage régulier : algorithme global

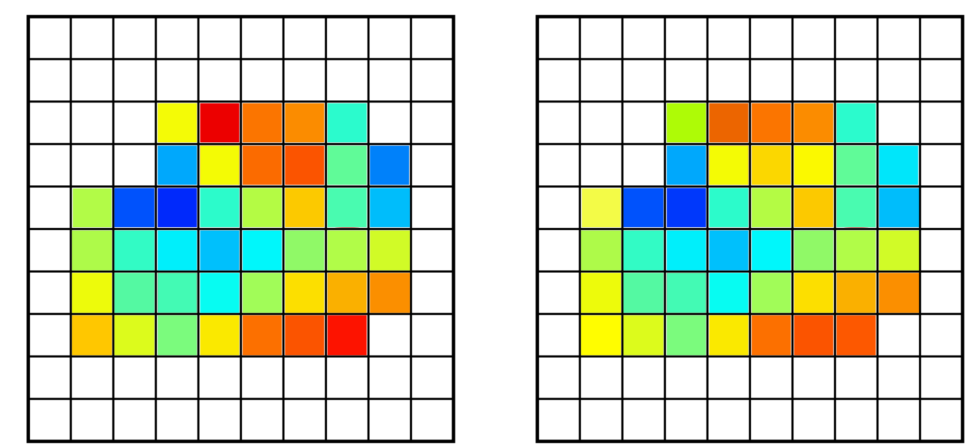
1. Initialisation

   (transfert données sur GPU)



2. Pour chaque tranche :

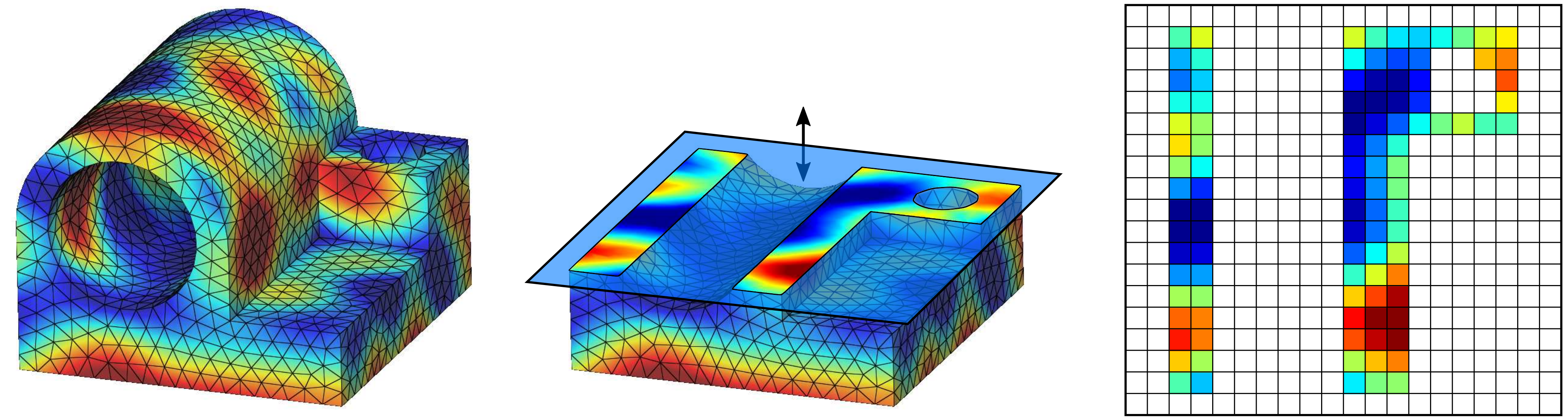
   - rendu du champ A
   - rendu du champ B



T_f T_g

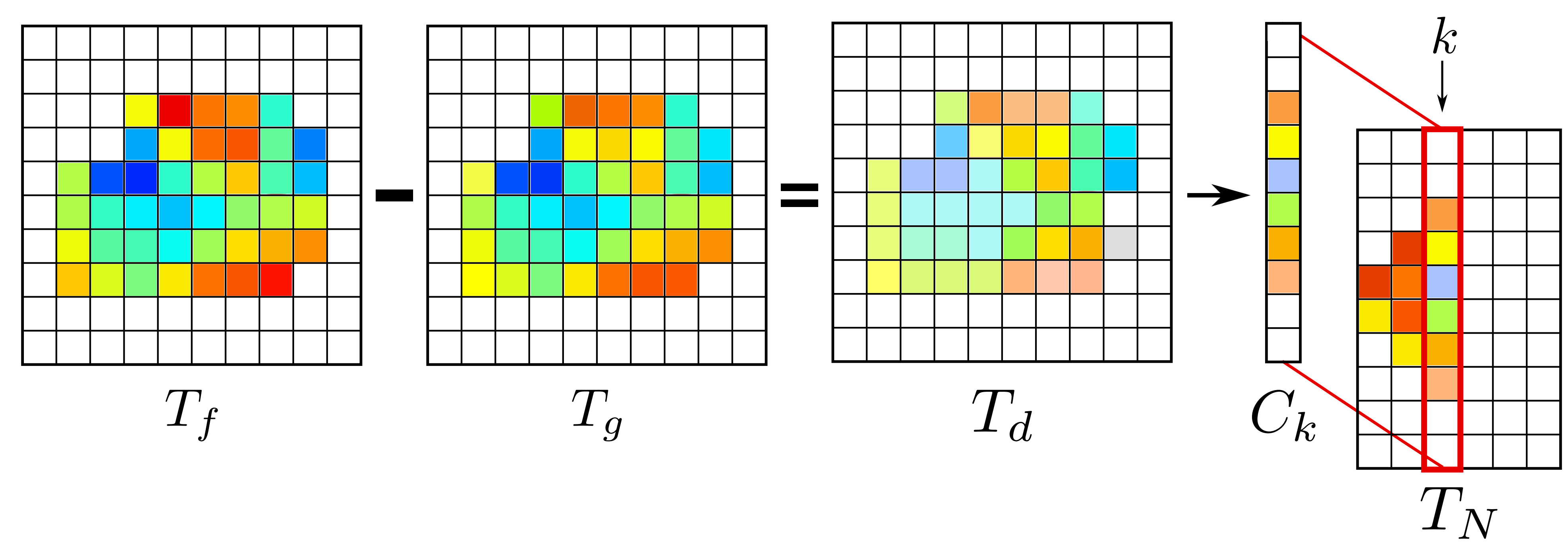
1. Initialisation

   (transfert données sur GPU)



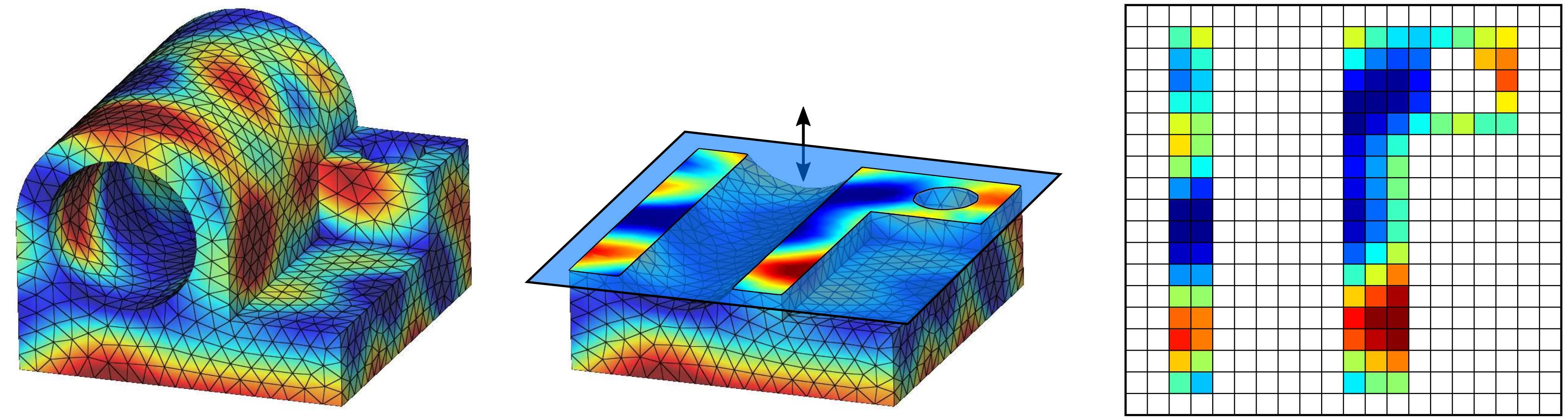
2. Pour chaque tranche :

   - rendu du champ A
   - rendu du champ B
   - difference
   - calcul de la contribution
     à la distance globale



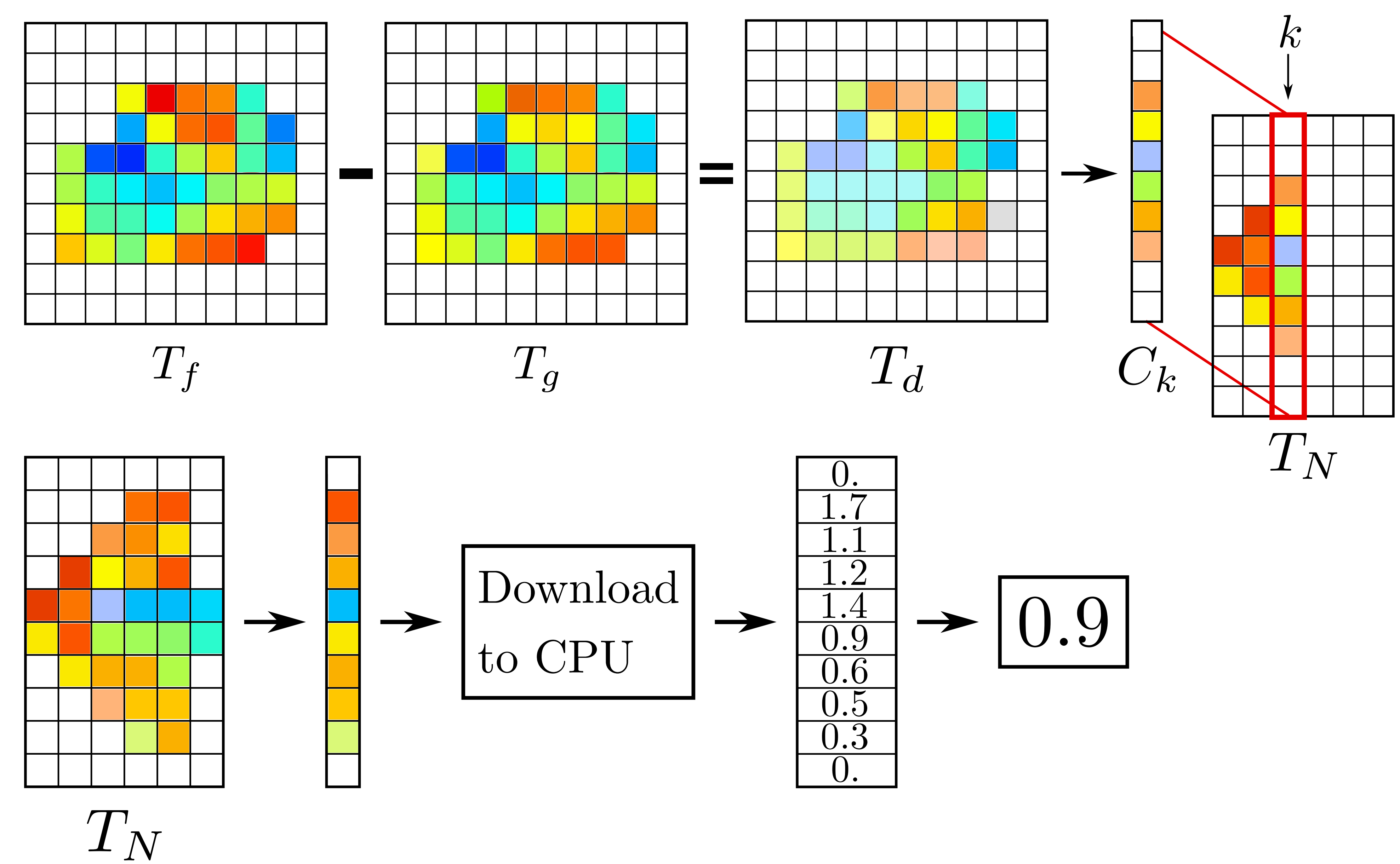
1. Initialisation

   (transfert données sur GPU)



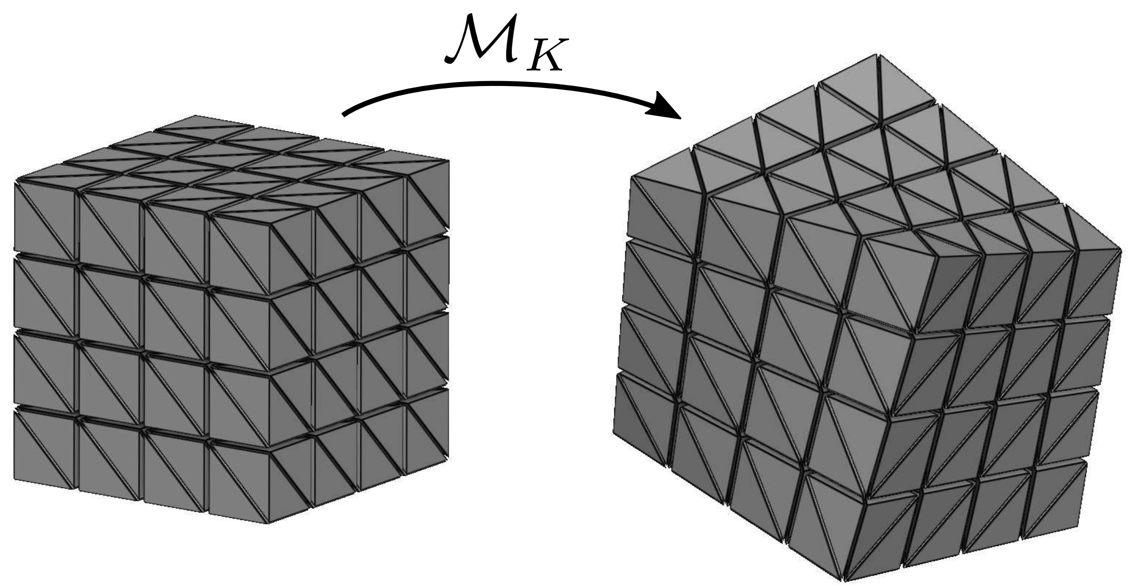
2. Pour chaque tranche :

   - rendu du champ A
   - rendu du champ B
   - difference
   - calcul de la contribution à la distance globale

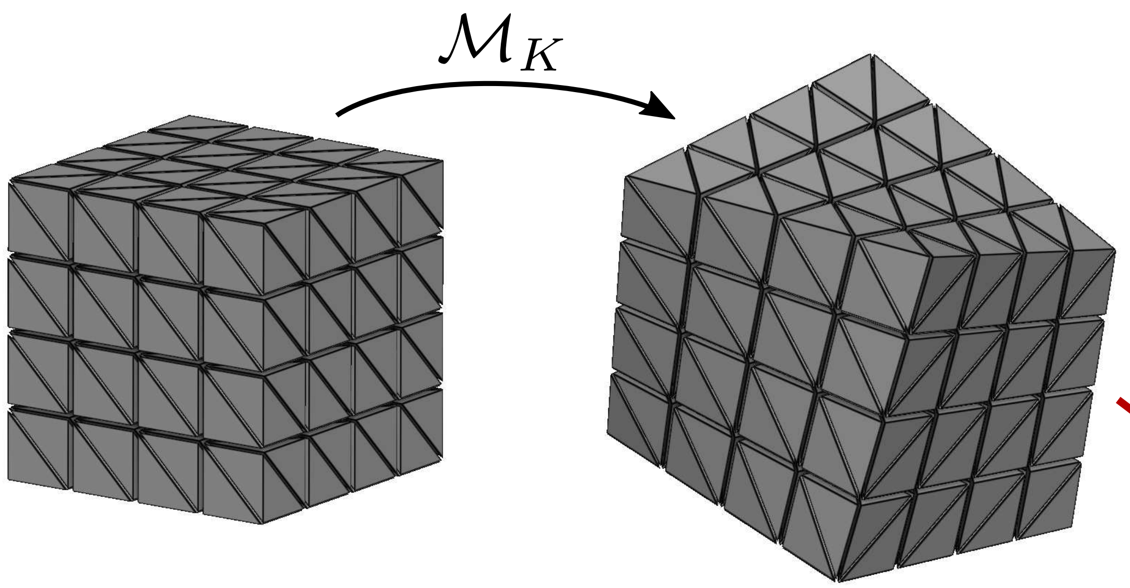


3. Combinaisons des contributions

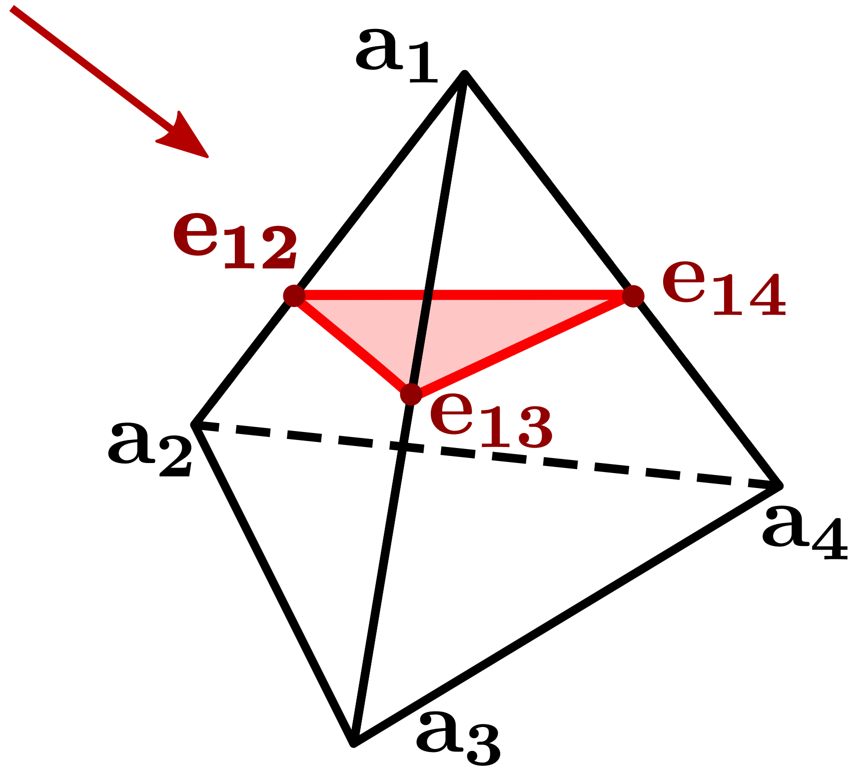
1. Transformation
   subdivision si non-affine
   (*OpenGL :* vertex shader)



1. Transformation
   subdivision si non-affine
   (*OpenGL :* vertex shader)



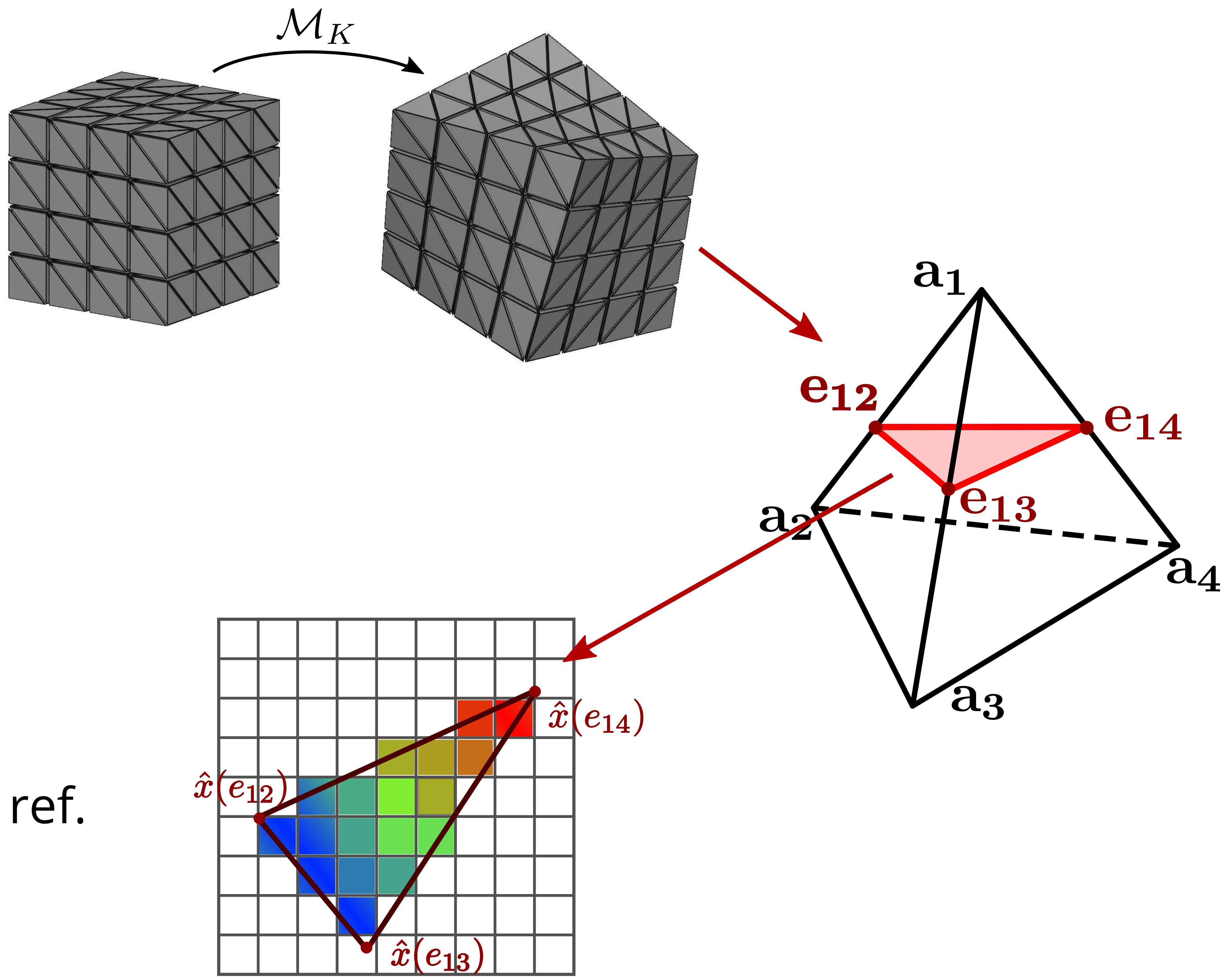
2. Interesection plan-tétraèdre
   marching tet *[Akio et Koide '91]*
   (*OpenGL :* geometry shader)



1. Transformation
   subdivision si non-affine
   (*OpenGL :* vertex shader)

2. Interesection plan-tétraèdre
   marching tet *[Akio et Koide '91]*
   (*OpenGL :* geometry shader)

3. Interpolation linéaire des coords. de ref.
   (*OpenGL :* rasterisation)

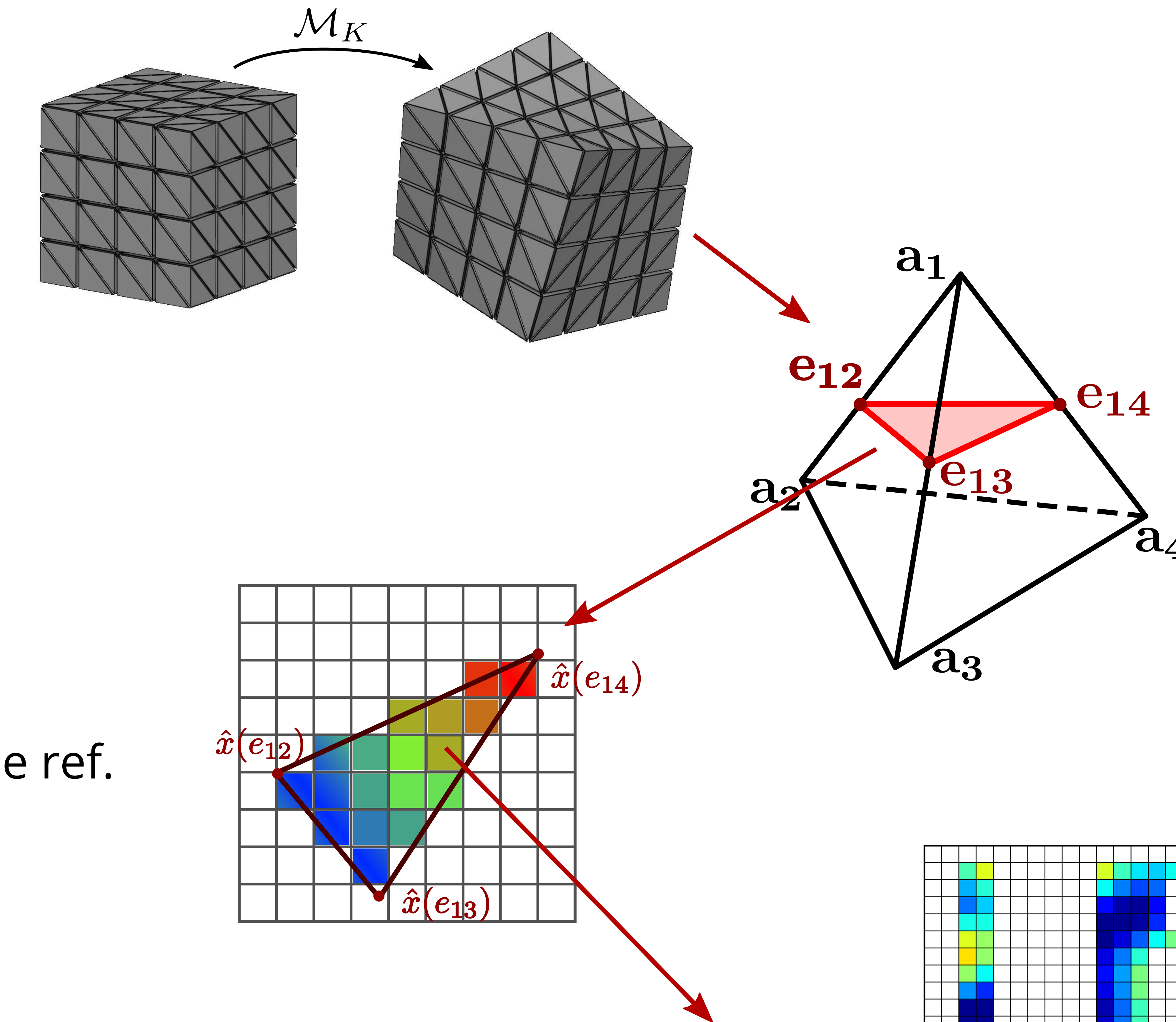


1. Transformation
   subdivision si non-affine
   (*OpenGL :* vertex shader)

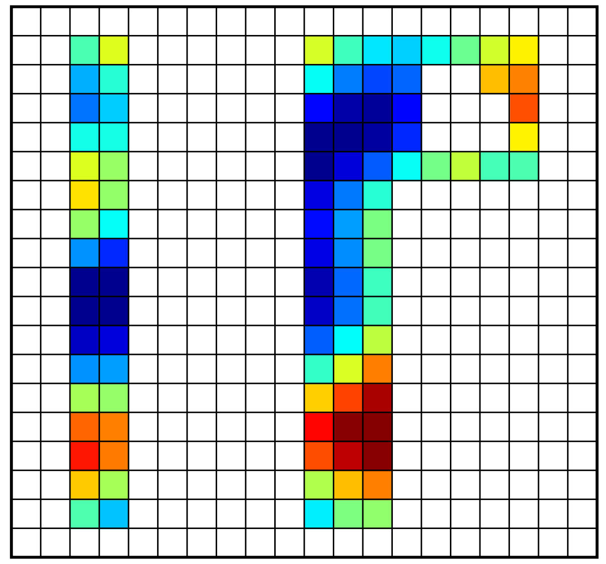
2. Interesection plan-tétraèdre
   marching tet *[Akio et Koide '91]*
   (*OpenGL :* geometry shader)

3. Interpolation linéaire des coords. de ref.
   (*OpenGL :* rasterisation)

4. Évaluation des fonctions de formes
   (*OpenGL :* fragment shader)



$$f_h(x) = \hat{f}_K \circ \mathcal{M}_K^{-1}(x)$$



Paramètres et validation

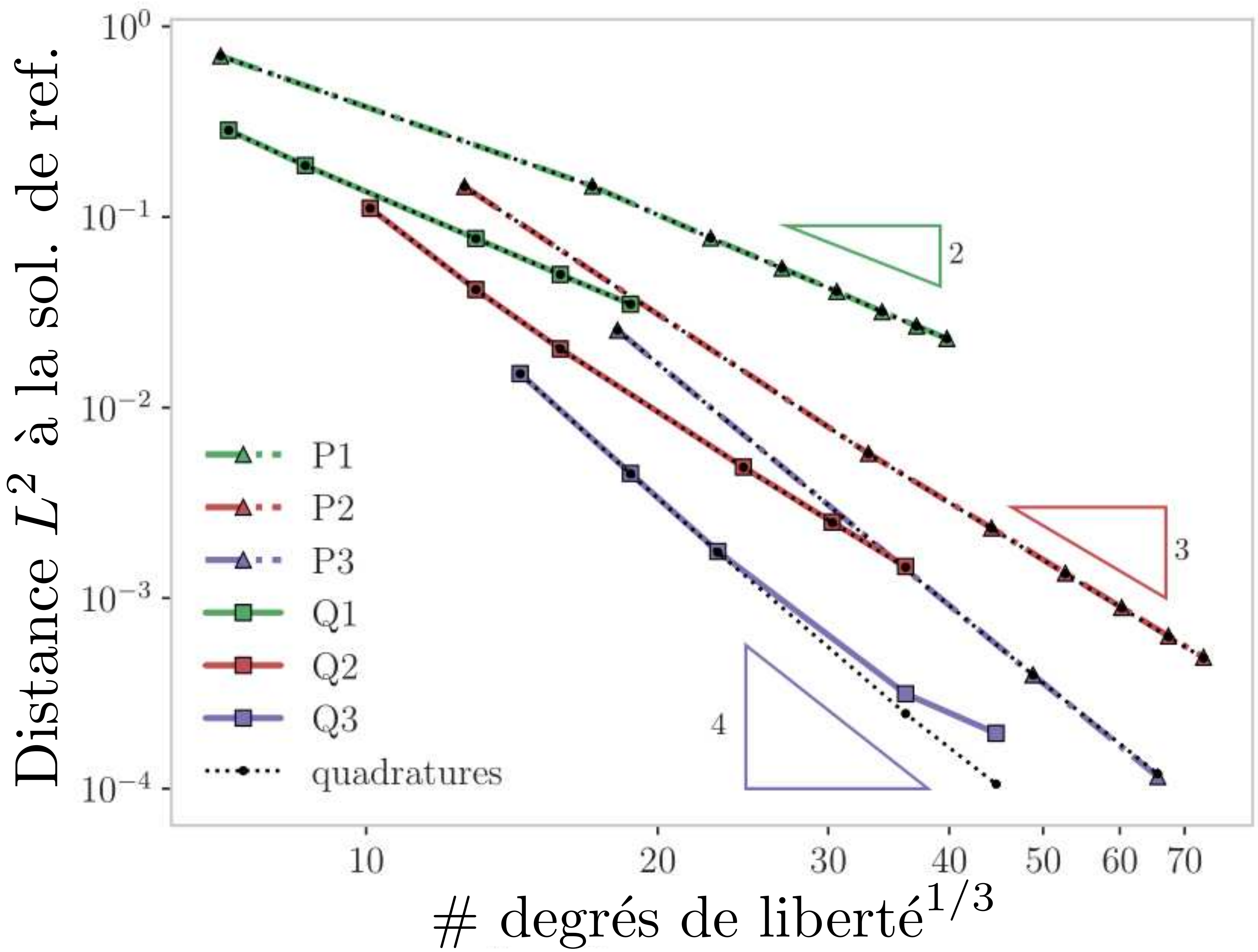
- Paramètres :
  - nombre d'échantillons
  - niveau de subdivision (si non-affine)
  - orientation du modèle dans la grille

convergence validée
expérimentalement

- Paramètres :
  - nombre d'échantillons
  - niveau de subdivision (si non-affine)
  - orientation du modèle dans la grille

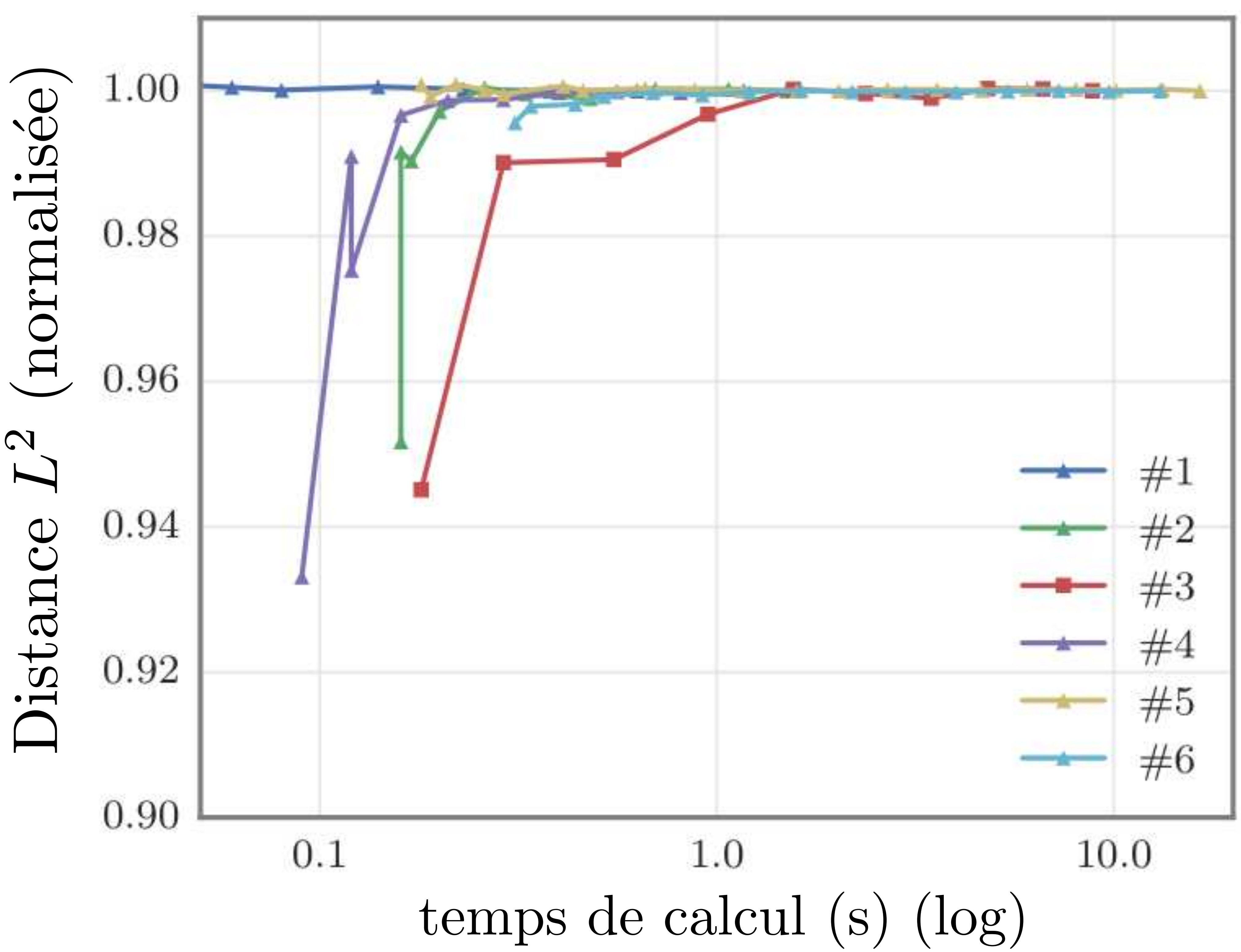
convergence validée expérimentalement

- Validation des distances sur problèmes avec solution analytique :



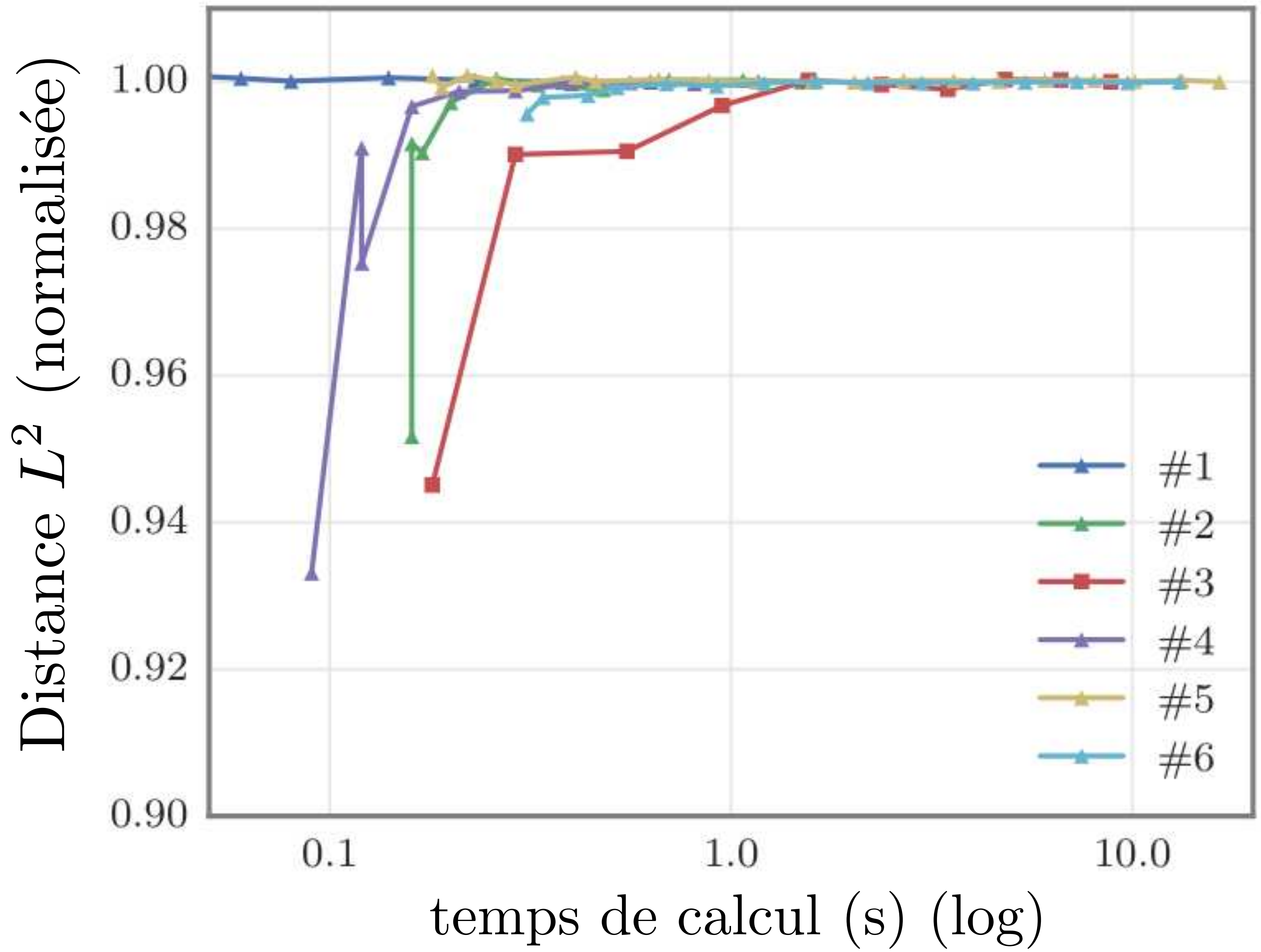
- Convergence de la distance L2 :
  - moins d'une seconde pour <1 million d'éléments

model	dim	# cells	basis
#1 : joint (fig. 5.3)	1	10 k	P_2 (tet)
		65 k	P_1 (tet)
#2 : hanger (fig. 5.10)	3	1 739 k	P_1 (tet)
		343 k	P_2 (tet)
#3 : hanger (fig. 5.10)	3	36 k	Q_2 (hex)
		290 k	Q_1 (hex)
#4 : carter (fig. 5.12)	1	1 210 k	P_1 (tet)
		373 k	P_2 (tet)
#5 : 747 (fig. 5.14)	1	1 385 k	P_1 (tet)
		577 k	P_2 (tet)
#6 : 40heads (fig. 5.14)	1	2 905 k	P_1 (tet)
		2 350 k	P_2 (tet)

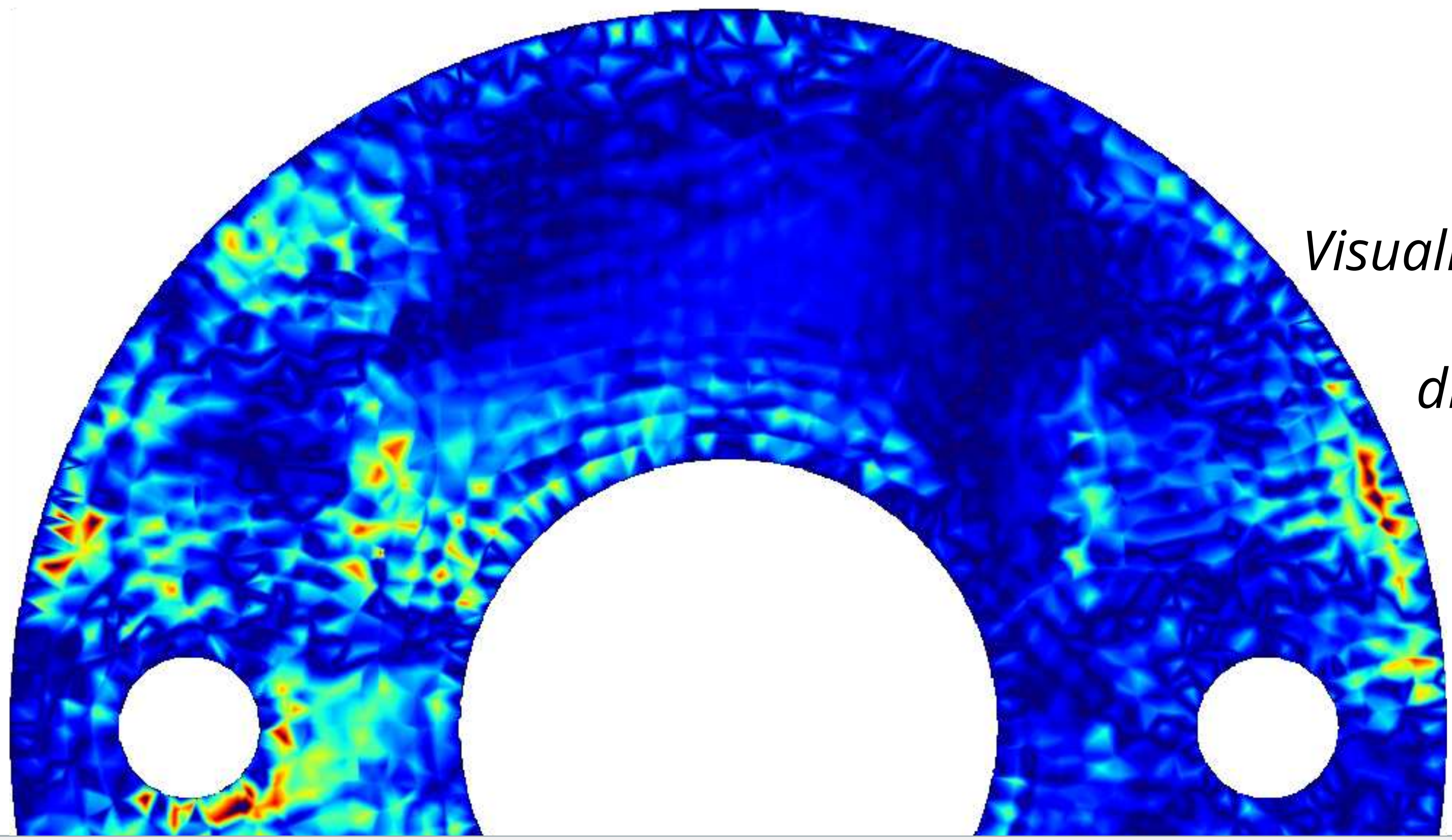


- Convergence de la distance L2 :
  - moins d'une seconde pour <1 million d'éléments
  - jusqu'à une minute pour très gros champs (~100M degrés de liberté)

model	dim	# cells	basis
#1 : joint (fig. 5.3)	1	10 k 65 k	P_2 (tet) P_1 (tet)
#2 : hanger (fig. 5.10)	3	1 739 k 343 k	P_1 (tet) P_2 (tet)
#3 : hanger (fig. 5.10)	3	36 k 290 k	Q_2 (hex) Q_1 (hex)
#4 : carter (fig. 5.12)	1	1 210 k 373 k	P_1 (tet) P_2 (tet)
#5 : 747 (fig. 5.14)	1	1 385 k 577 k	P_1 (tet) P_2 (tet)
#6 : 40heads (fig. 5.14)	1	2 905 k 2 350 k	P_1 (tet) P_2 (tet)



- Méthode *force-brute* très efficace en pratique
- Approximation des transformations non-affines peut être améliorée
- Implémentation GPU open source : https://github.com/mxncr/FFES
- Visualisation interactive (rendu de la différence en temps réel)

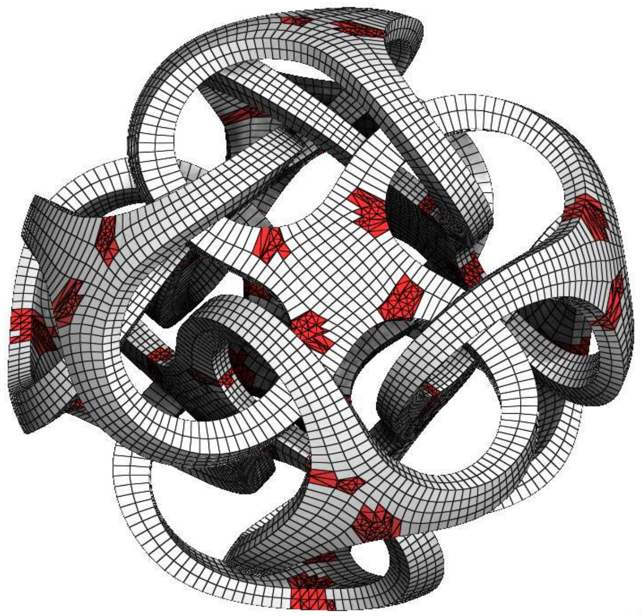


Visualisation d'une tranche

différence entre :

$\mathbb{P}_1$ *et* $\mathcal{H}yb_1$

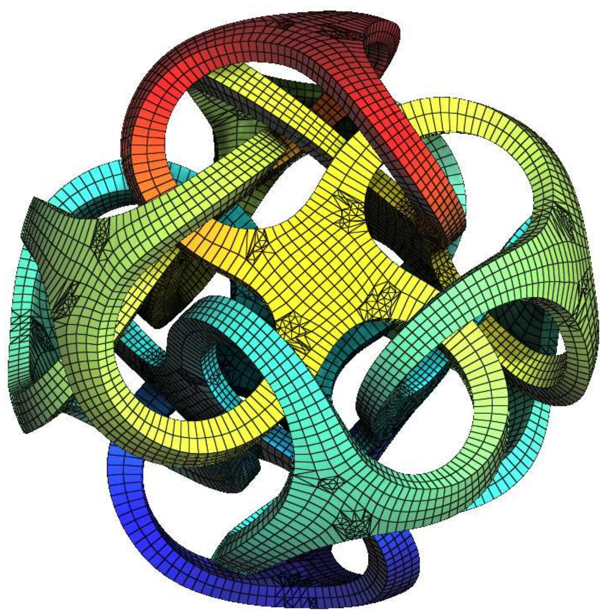
Sommaire



I. Génération de maillage hex-dominants

ALICE : mailleur hex-tet

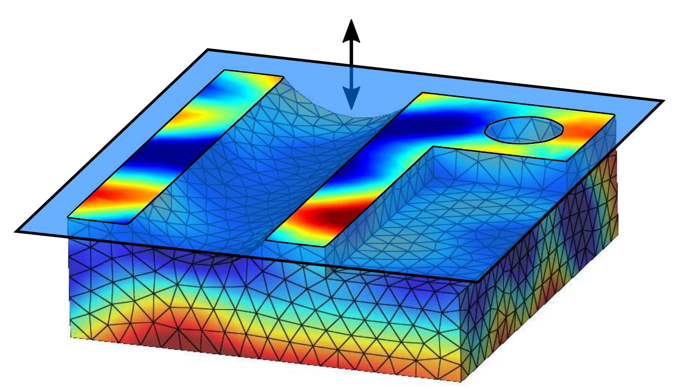
contribution : maillage robuste *[Ray, Sokolov, **Reberol**, Ledoux, Levy '18]*



II. Éléments finis sur maillages hex-tet

contribution : espace continu $\mathcal{H}yb_k\ (\mathbb{Q}_k, \mathbb{P}_{2k}, \mathbb{P}_k)$

*rapport [**Reberol** et Lévy '16]*



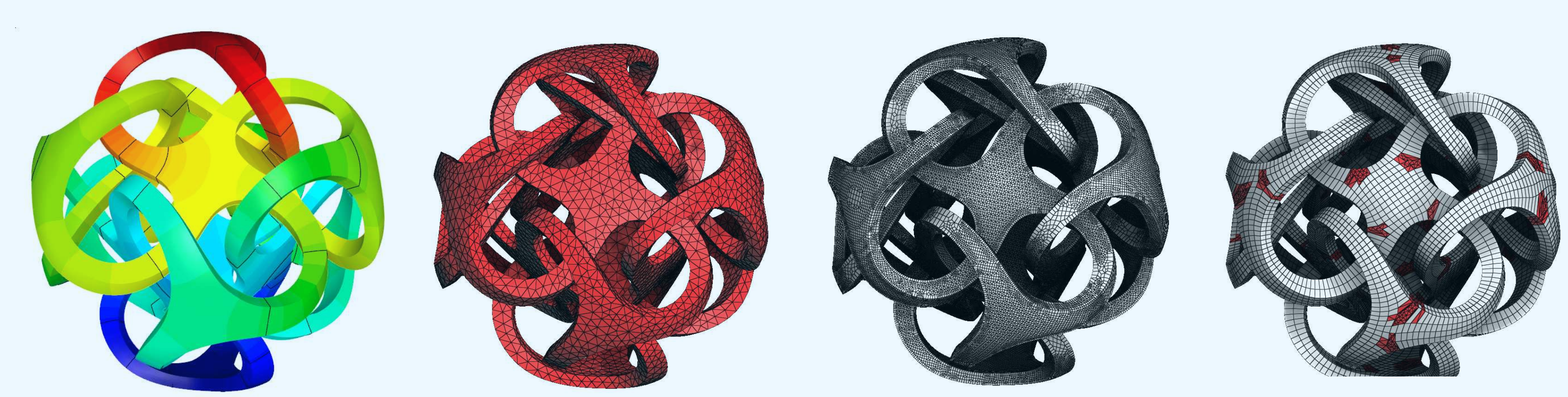
$||u_h - u_{ref}||$

III. Méthode d'évaluation

contribution : calcul de distance efficace

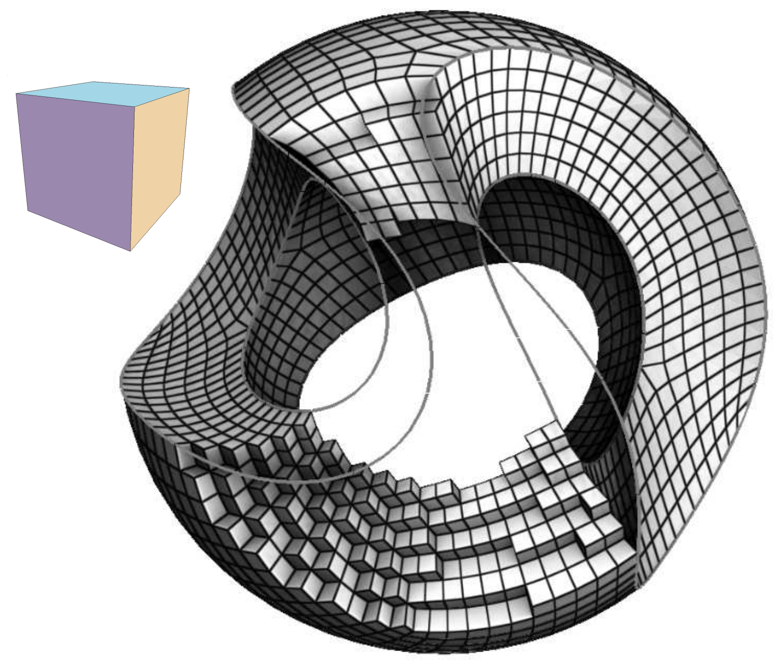
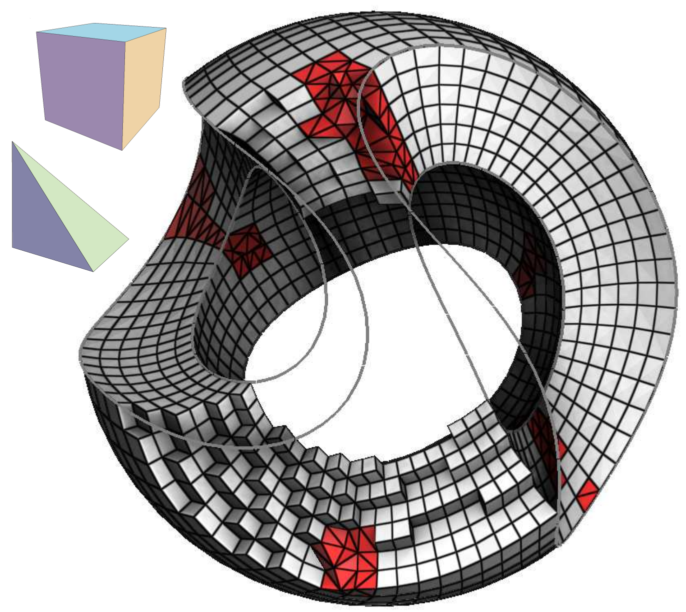
*article [**Reberol** et Lévy '18]*

IV. Comparaisons de solutions

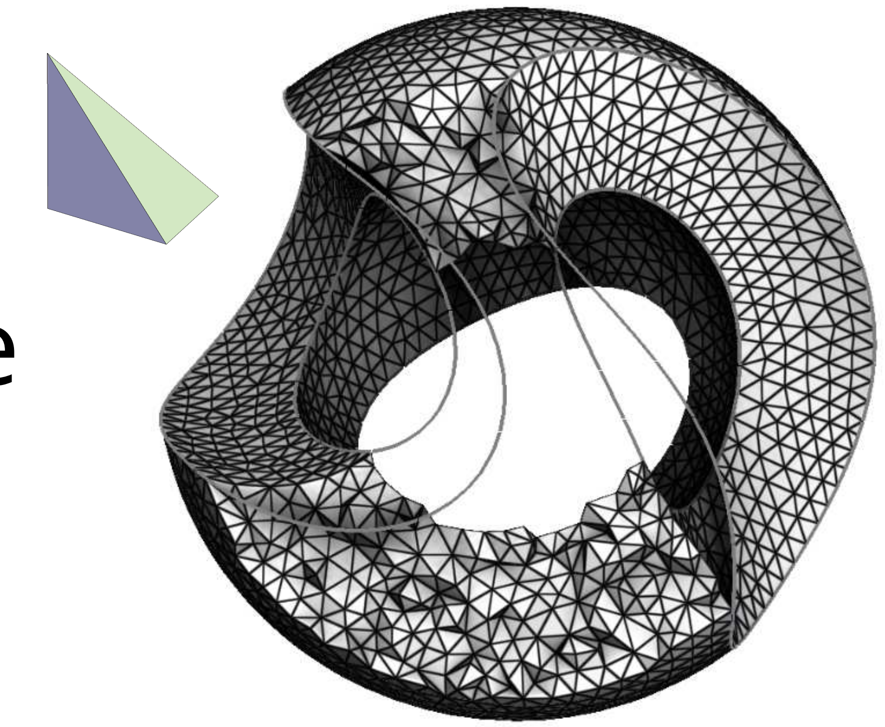


Influence des maillages sur les solutions

- Littérature (génération maillage) et connaissances communes :

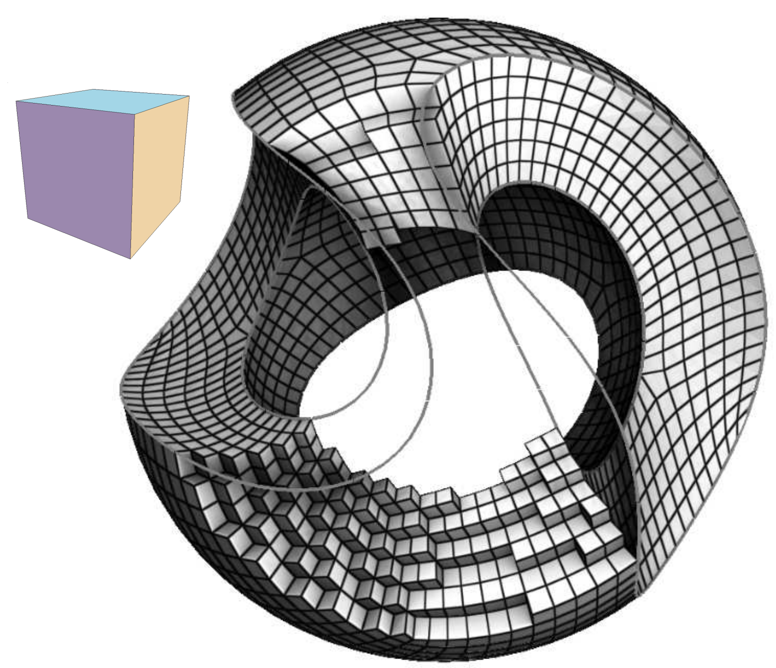



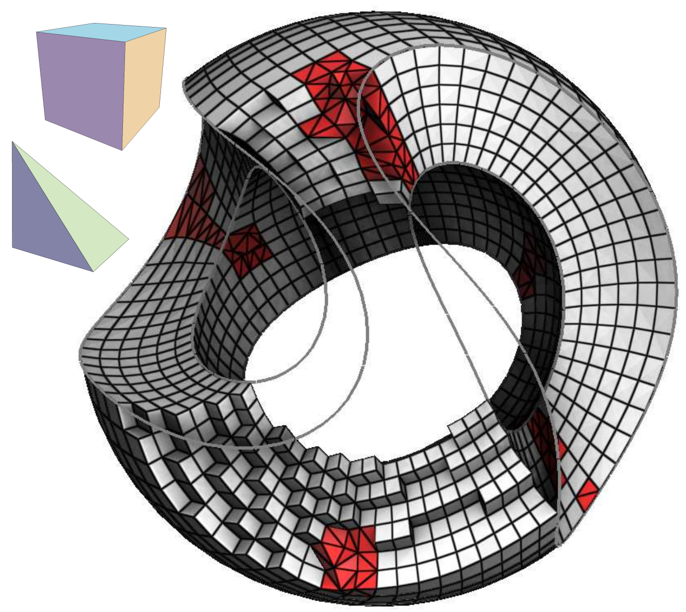
plus précis et efficace que



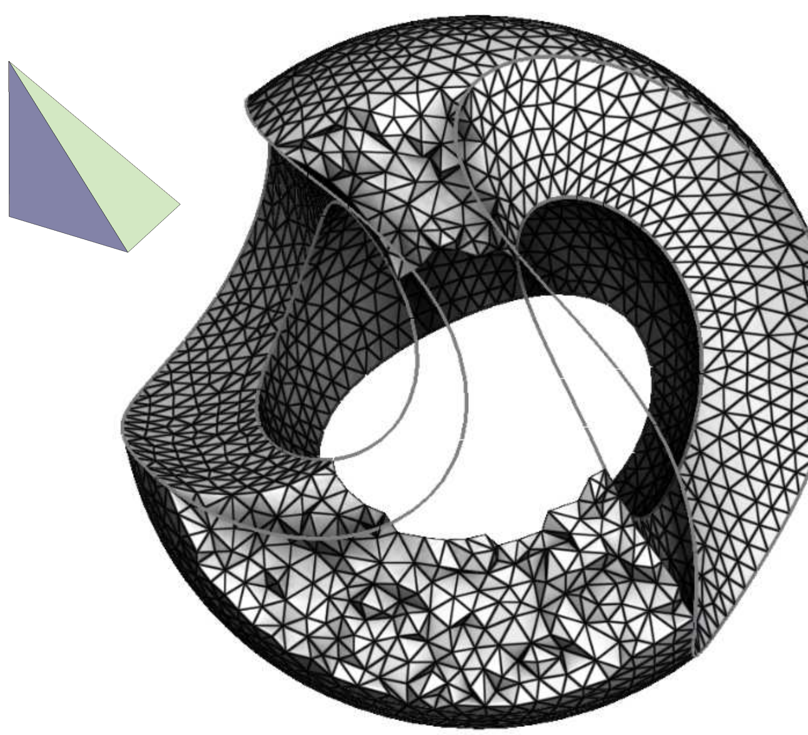
Influence des maillages sur les solutions

- Littérature (génération maillage) et connaissances communes :



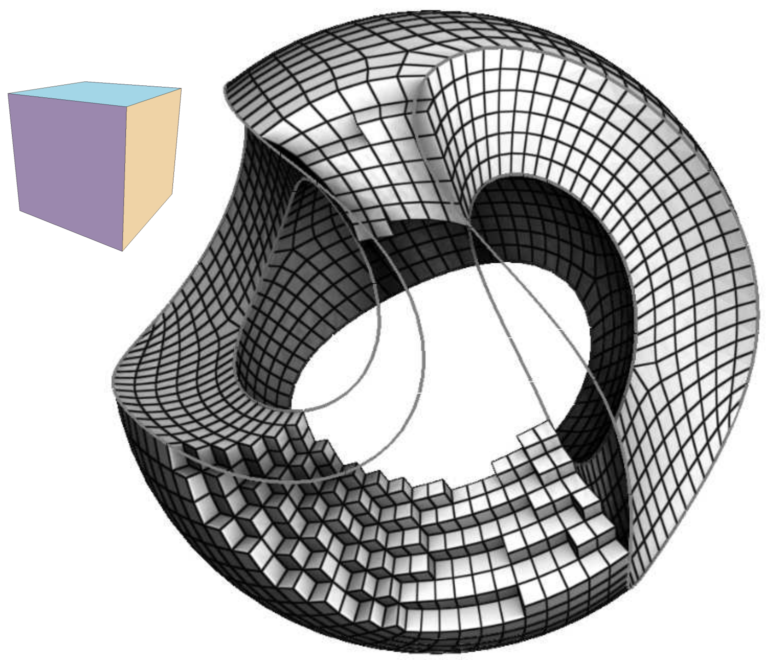
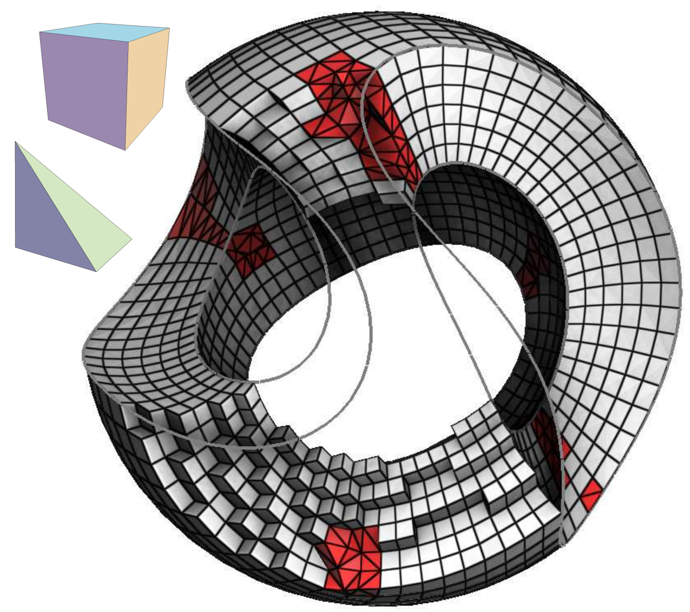


plus précis et efficace que

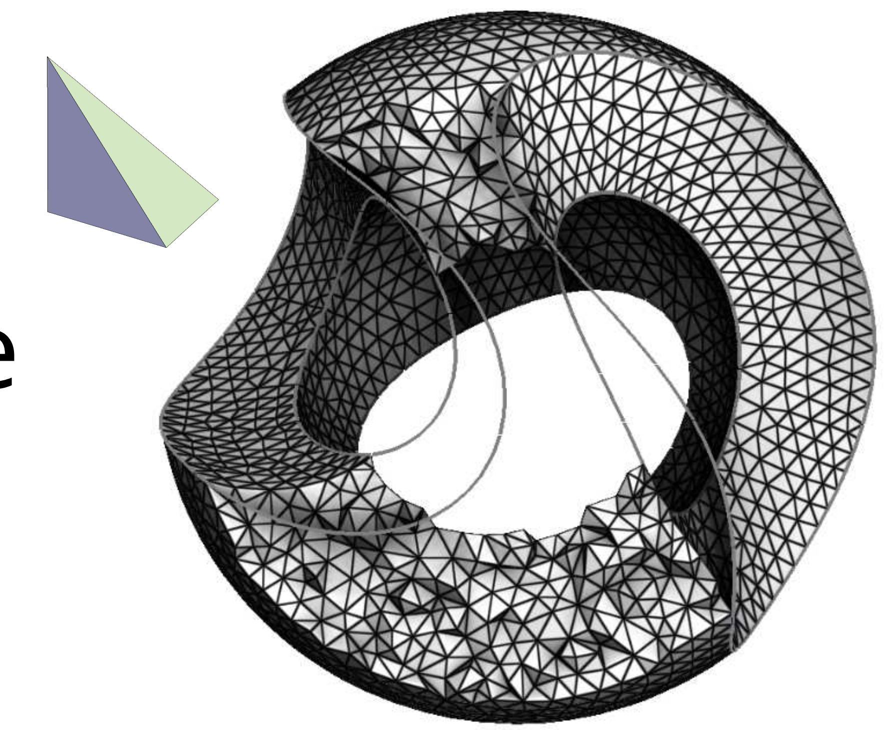


- Arguments intrinsèques :
  - termes polynomiaux supplémentaires
  - alignement avec les bords
  - moins de blocage (shear locking) *[Cook et al. '02]*

- Littérature (génération maillage) et connaissances communes :

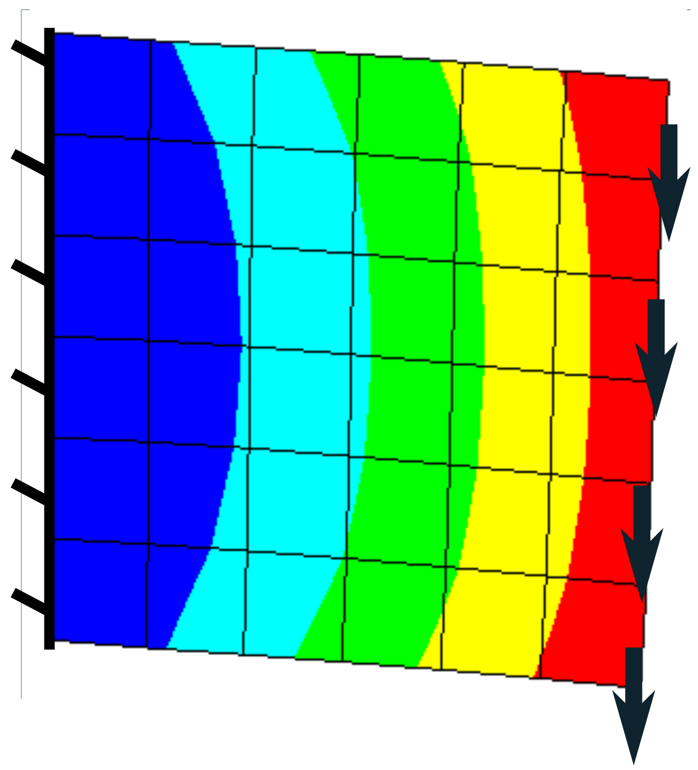
plus précis et efficace que



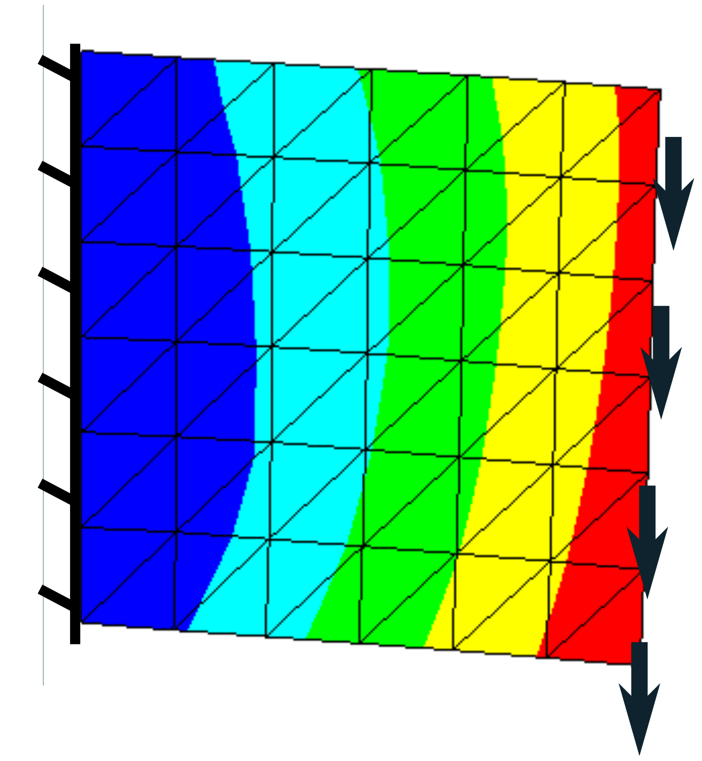
- Arguments intrinsèques :
  - termes polynomiaux supplémentaires
  - alignement avec les bords
  - moins de blocage (shear locking) *[Cook et al. '02]*

- Arguments numériques :
  - factorisation-somme, éléments spectraux (si ordres élevés) *[Orszag '80, Remacle et al. '16]*
  - améliorables (éléments incompatibles / hybrides) (si mécanique) *[Pian et Tong '86]*
  - régularité exploitable (si structuré par blocs) *[Turek et al. '99, '06]*

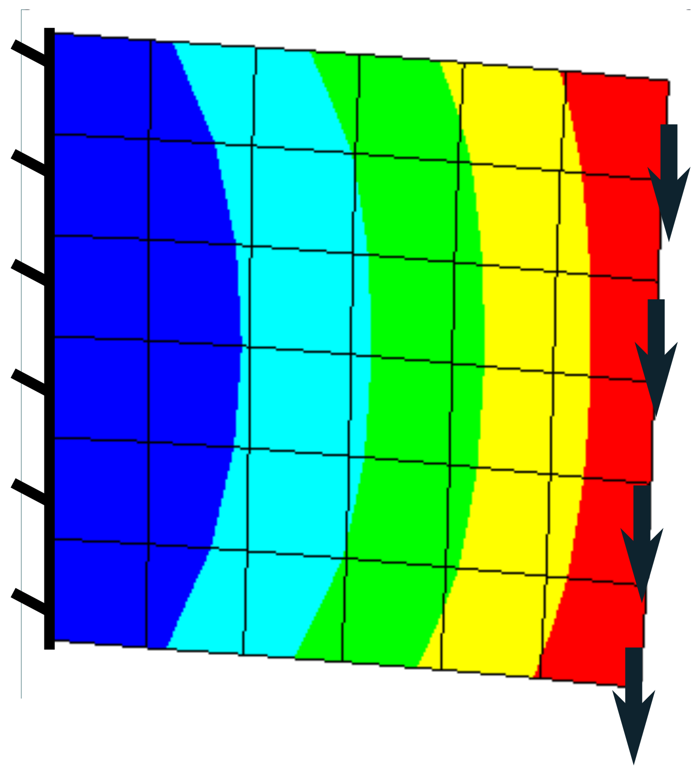
- Comparaison entre Q1 et P1 :



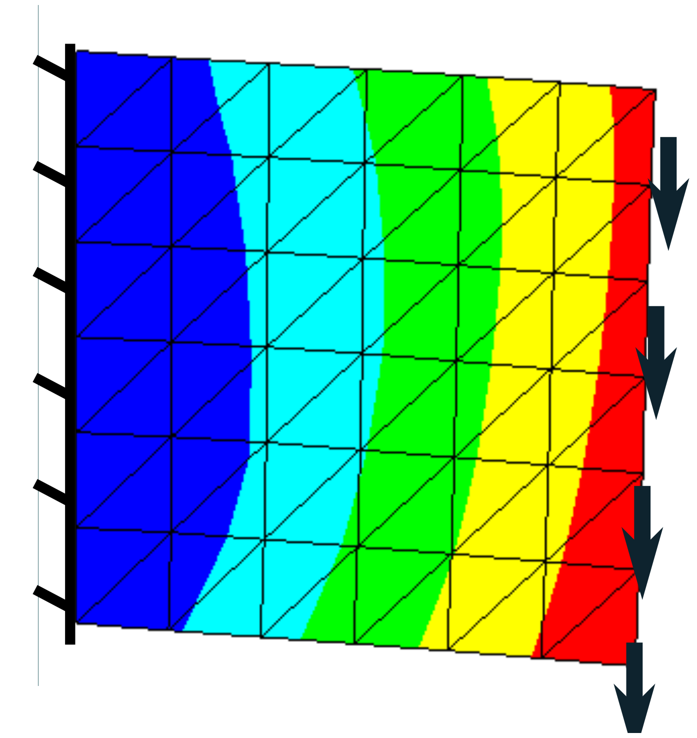
x1.7 plus précis que



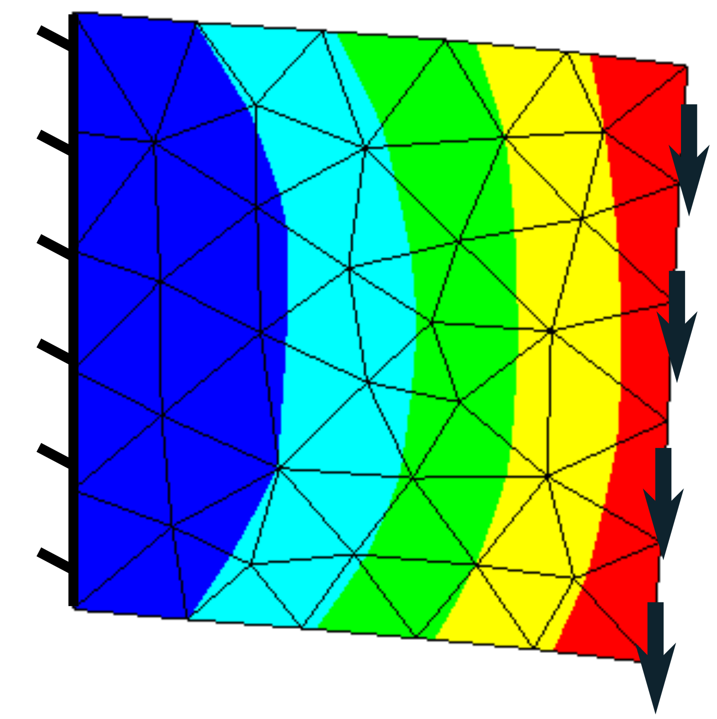
- Comparaison entre Q1 et P1 :



x1.7 plus précis que



équivalent à



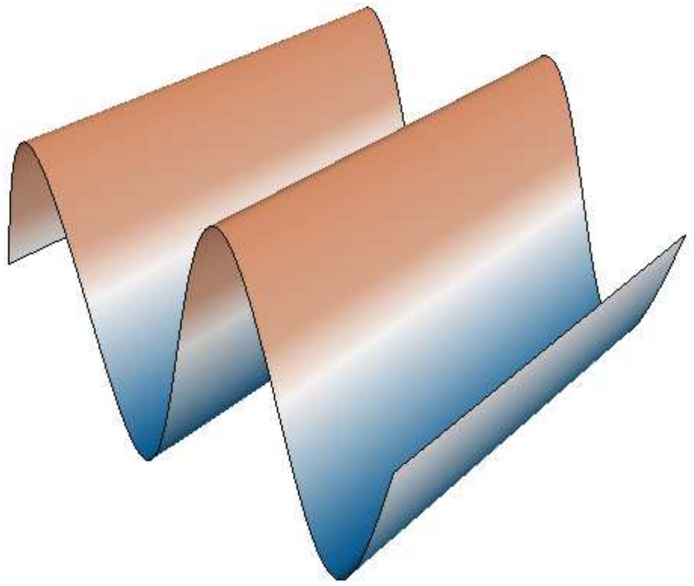
Triangles (tets) obtenus par subdivision de quads (hexs) non représentatifs de la realité mais c'est souvent ce qui est présenté et cité dans la littérature

- Comparaison entre Q1 et Q1 *tournés de 45 degrés* :

Problème :

$$\begin{cases} -\Delta u - (4\pi)^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \sin(4\pi x) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Solution :

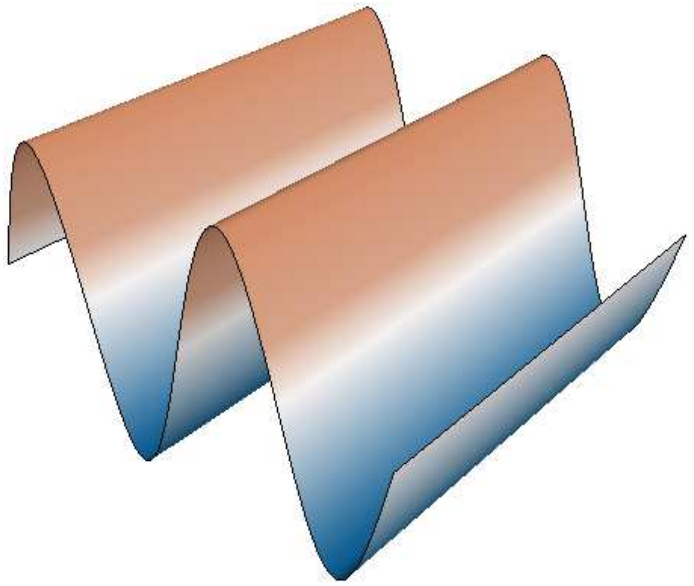


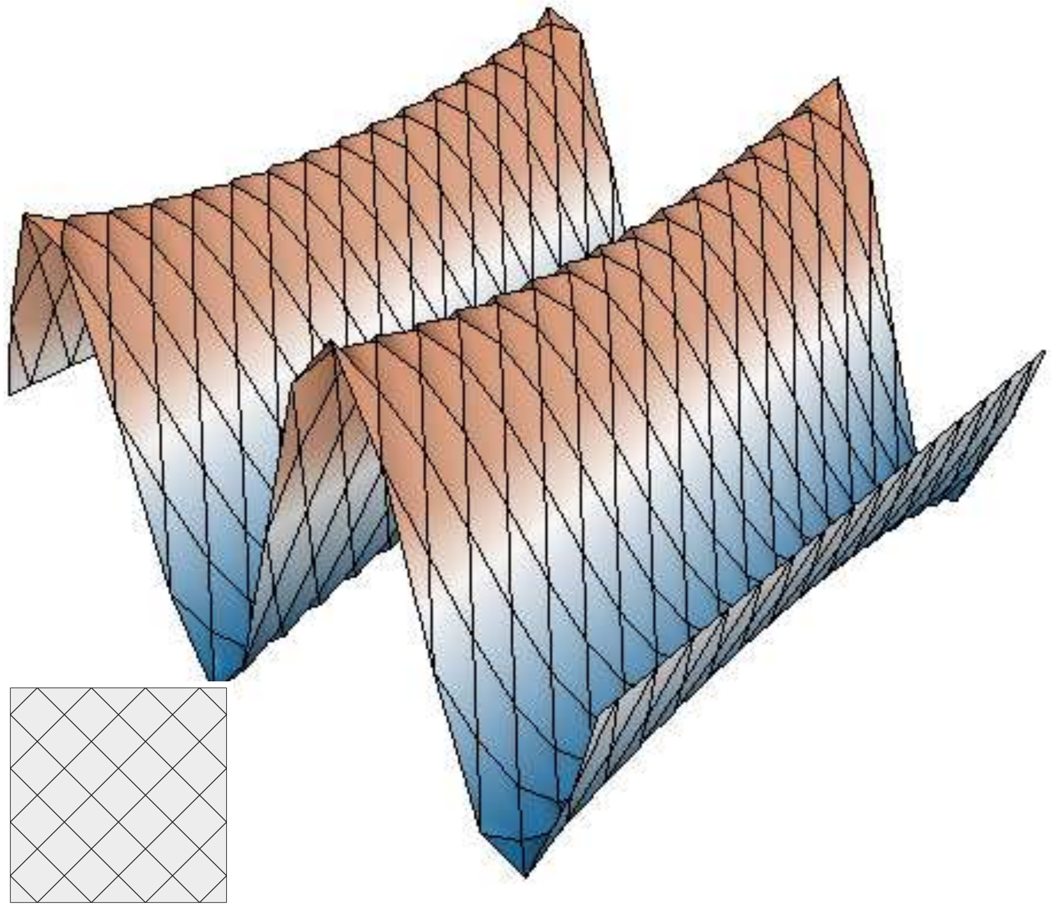
- Comparaison entre Q1 et Q1 *tournés de 45 degrés* :

Problème :

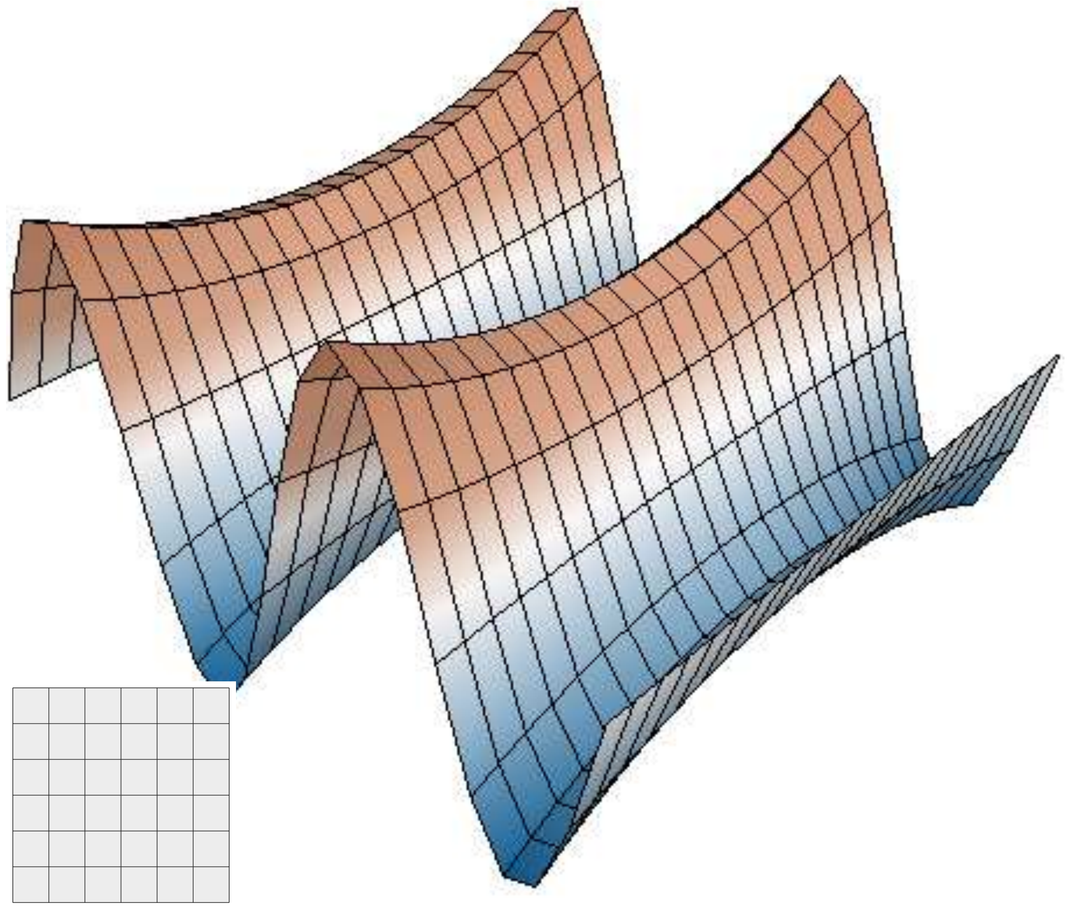
$$\begin{cases} -\Delta u - (4\pi)^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \sin(4\pi x) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Solution :



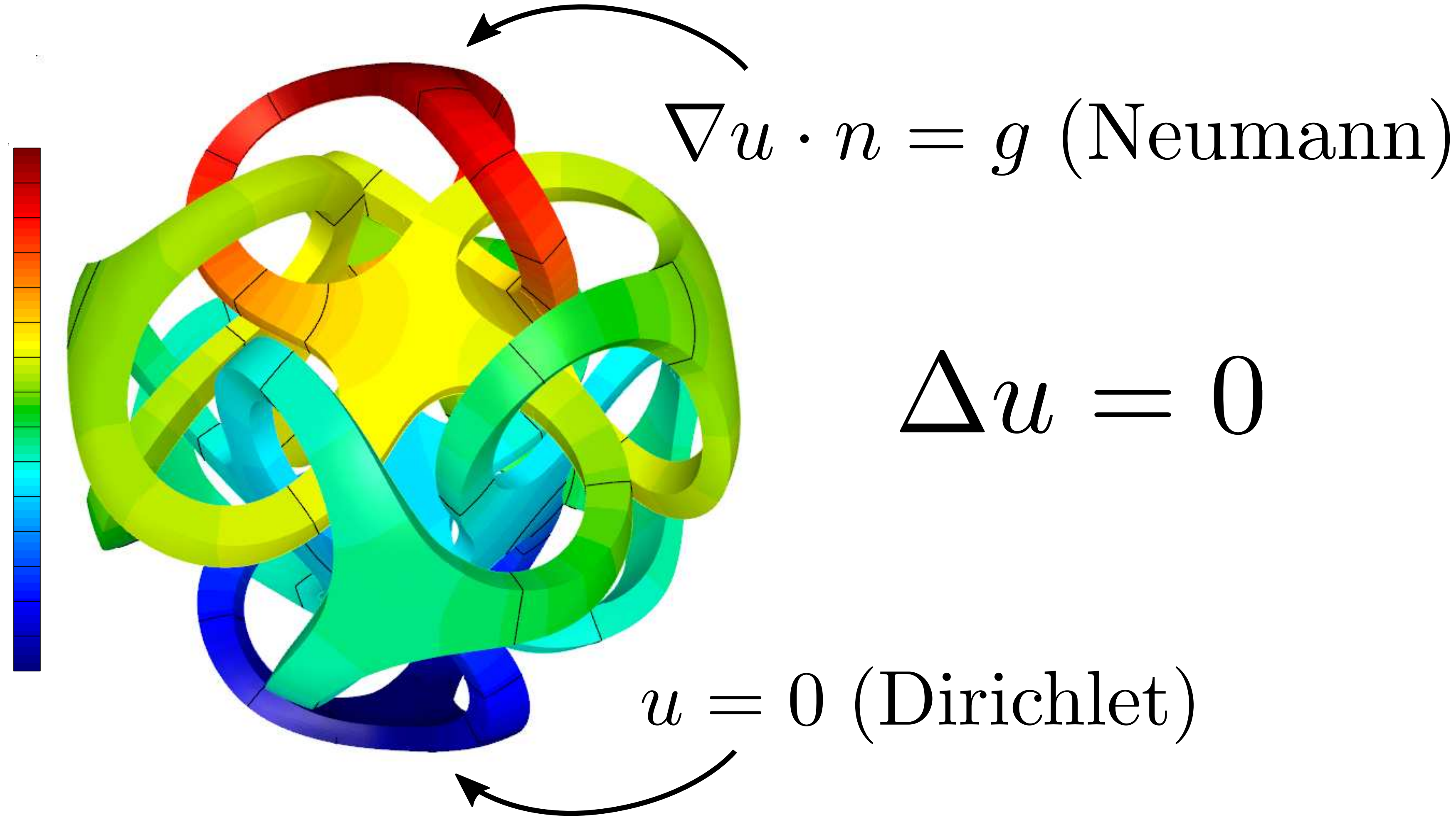


25% plus précis que



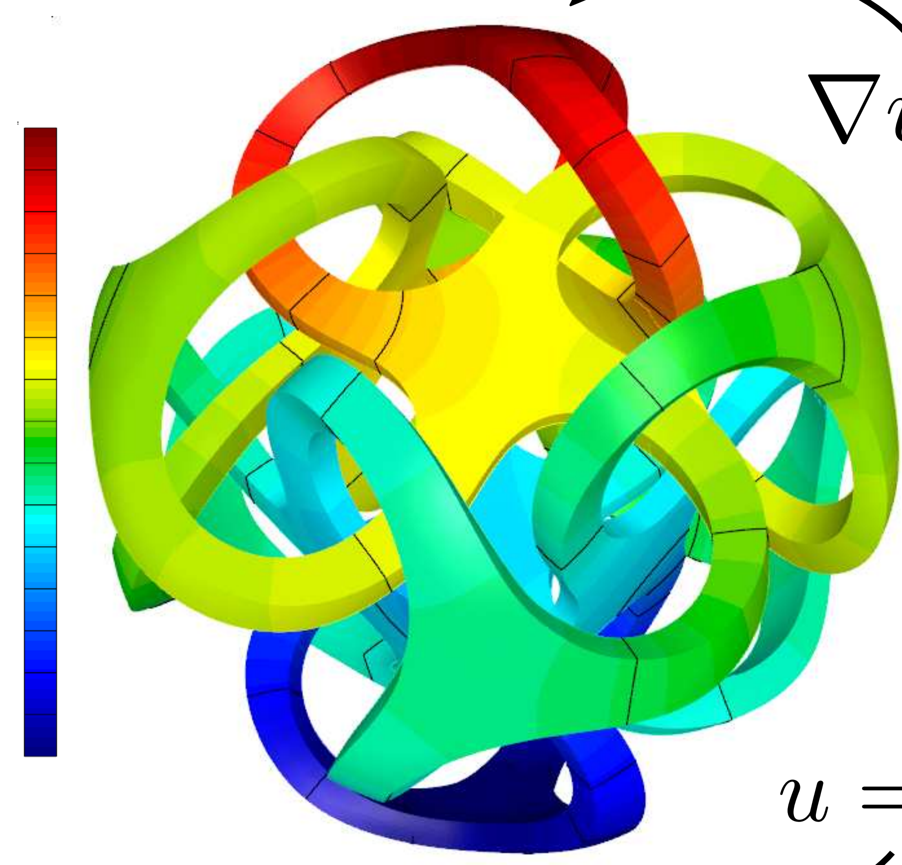
(car termes croisés alignés avec diagonales des quads)

- Problème et solution :



Problème de Poisson sur le métatron

- Problème et solution :

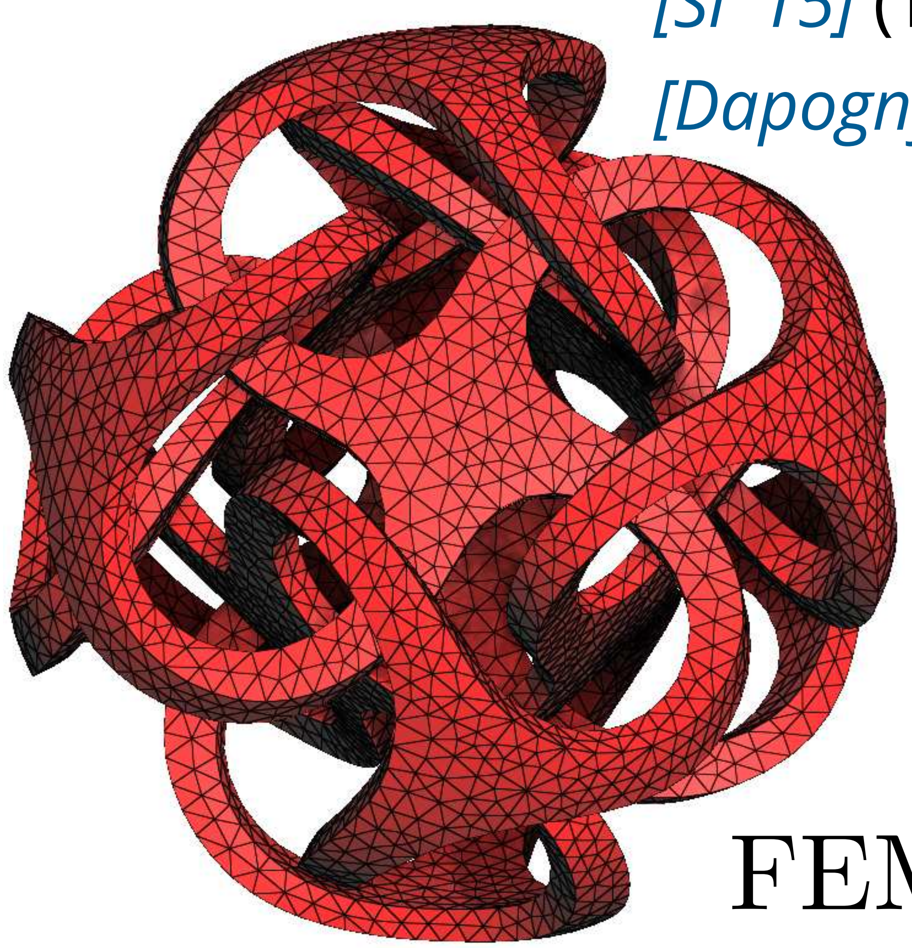


$\nabla u \cdot n = g$ (Neumann)

$$\Delta u = 0$$

$u = 0$ (Dirichlet)

- Types de maillages :



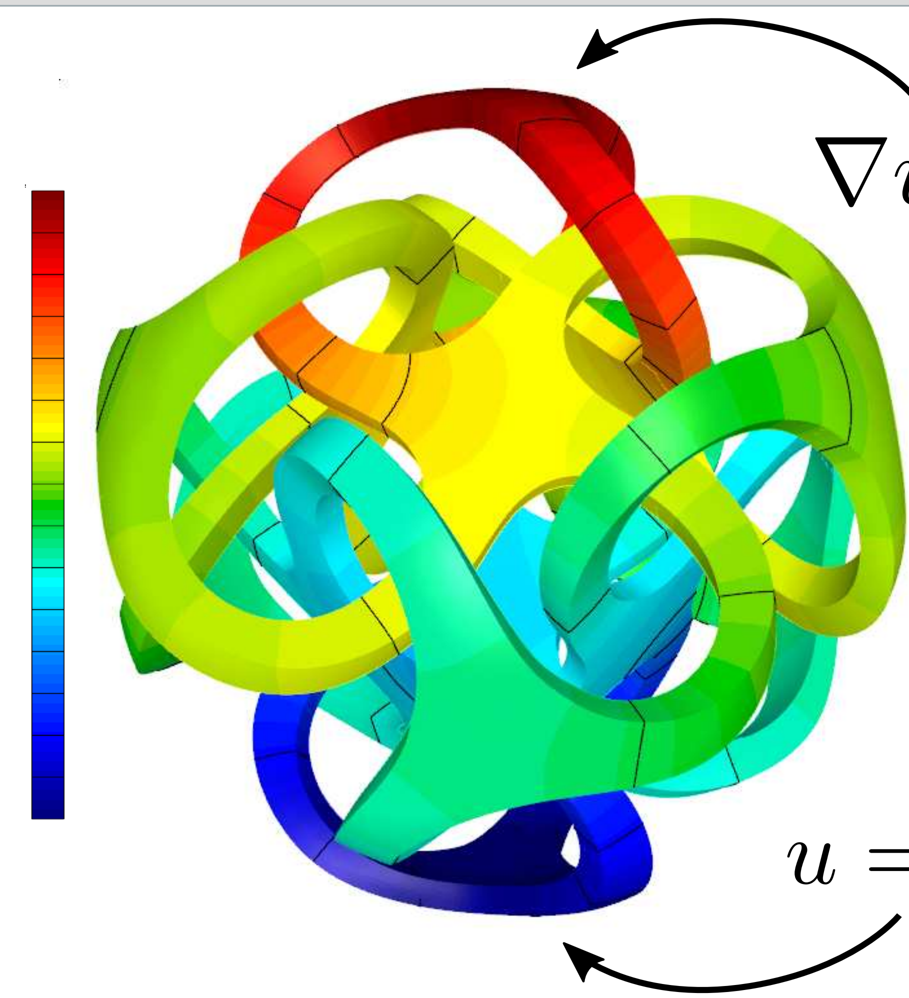
[Si '15] (TetGen)

[Dapogny et al. '14] (mmg3d)

$\mathrm{FEM} : \mathbb{P}_k$

Problème de Poisson sur le métatron

- Problème et solution :

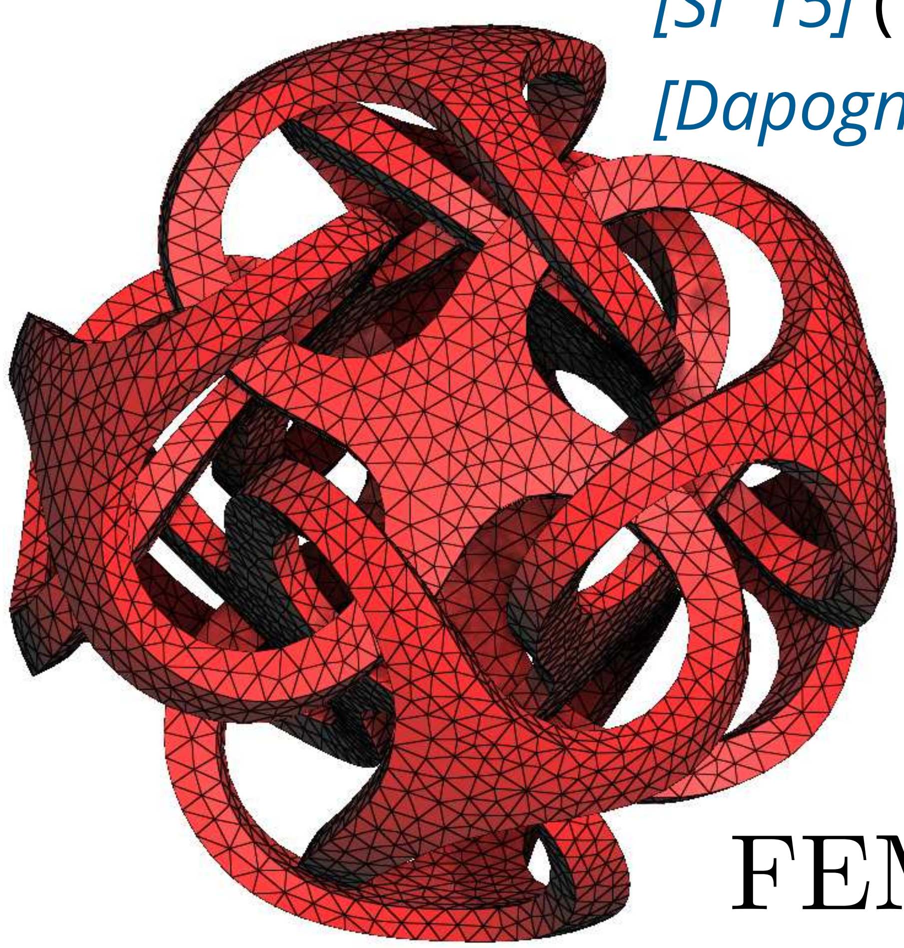


$\nabla u \cdot n = g$ (Neumann)

$$\Delta u = 0$$

$u = 0$ (Dirichlet)

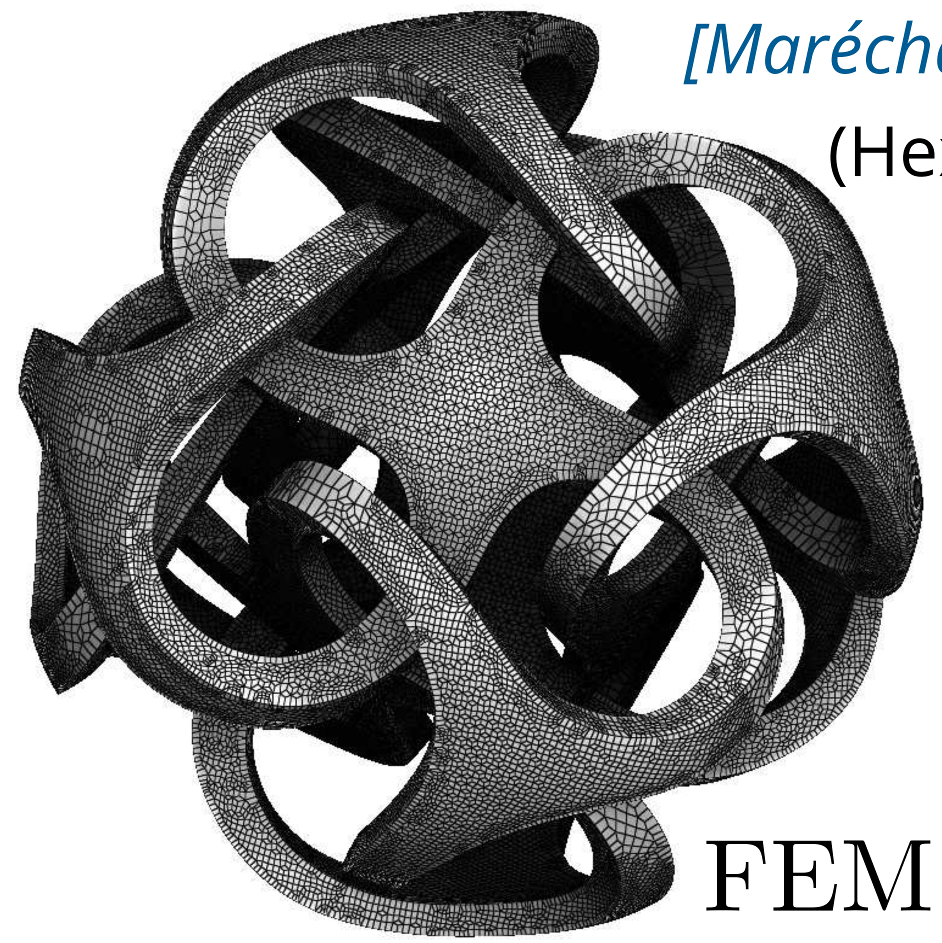
- Types de maillages :



[Si '15] (TetGen)

[Dapogny et al. '14] (mmg3d)

$\mathrm{FEM} : \mathbb{P}_k$

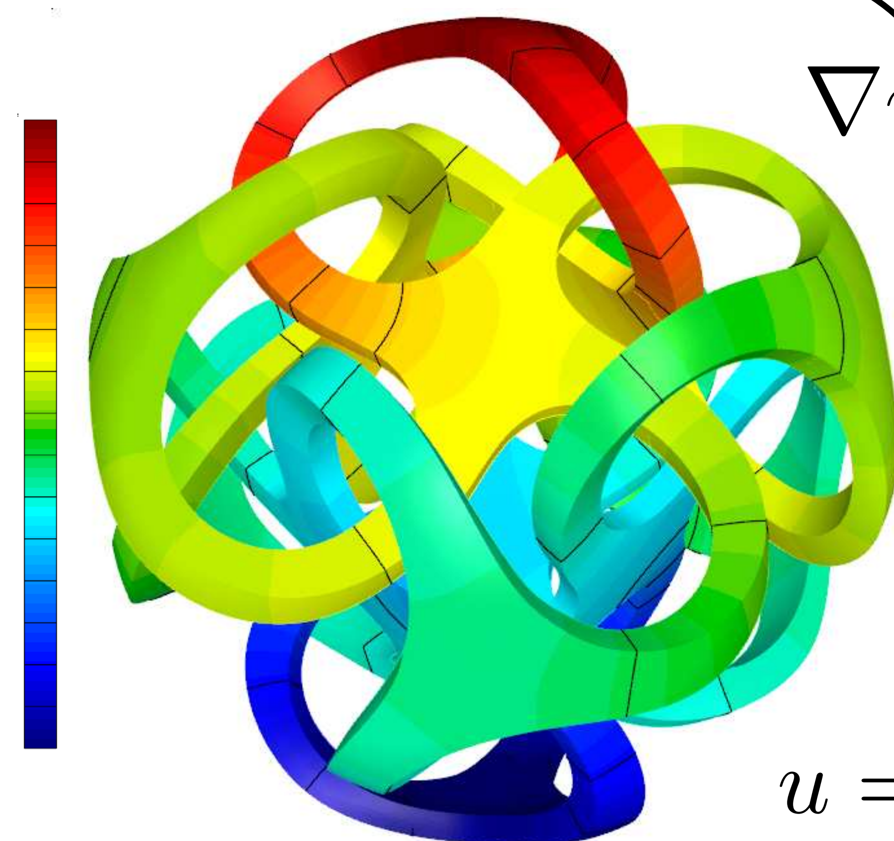


[Maréchal '09] (Hexotic)

$\mathrm{FEM} : \mathbb{Q}_k$

Problème de Poisson sur le métatron

- Problème et solution :

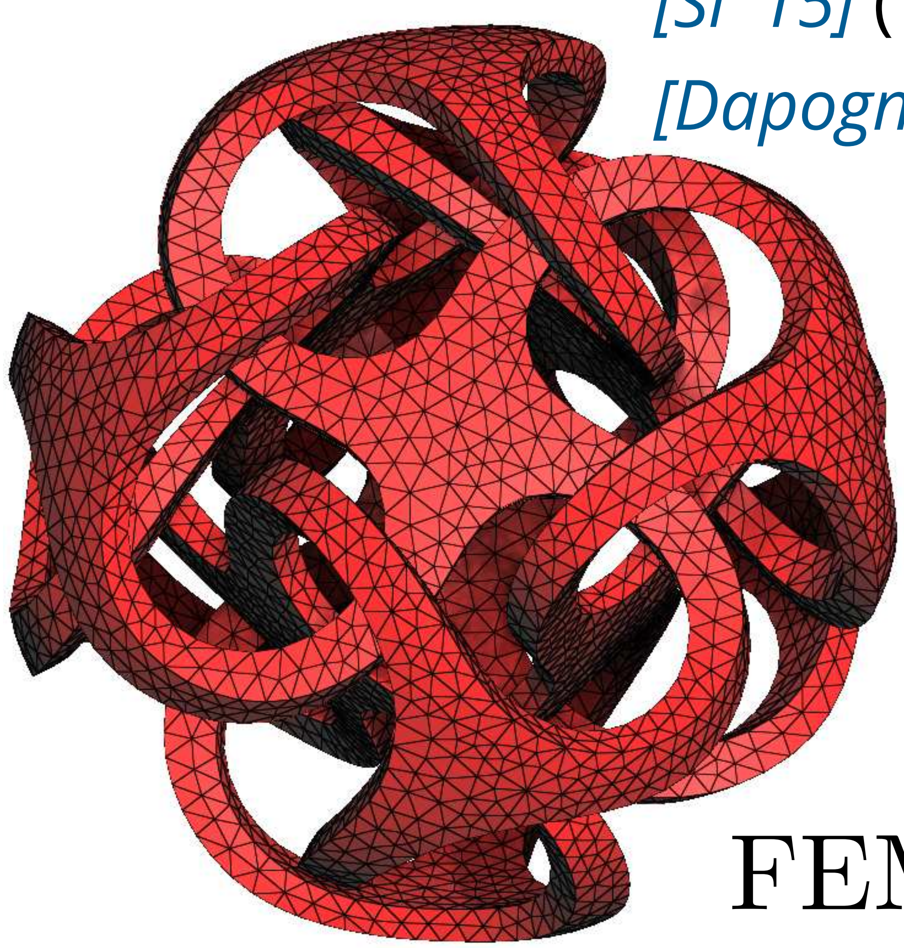


$\nabla u \cdot n = g$ (Neumann)

$$\Delta u = 0$$

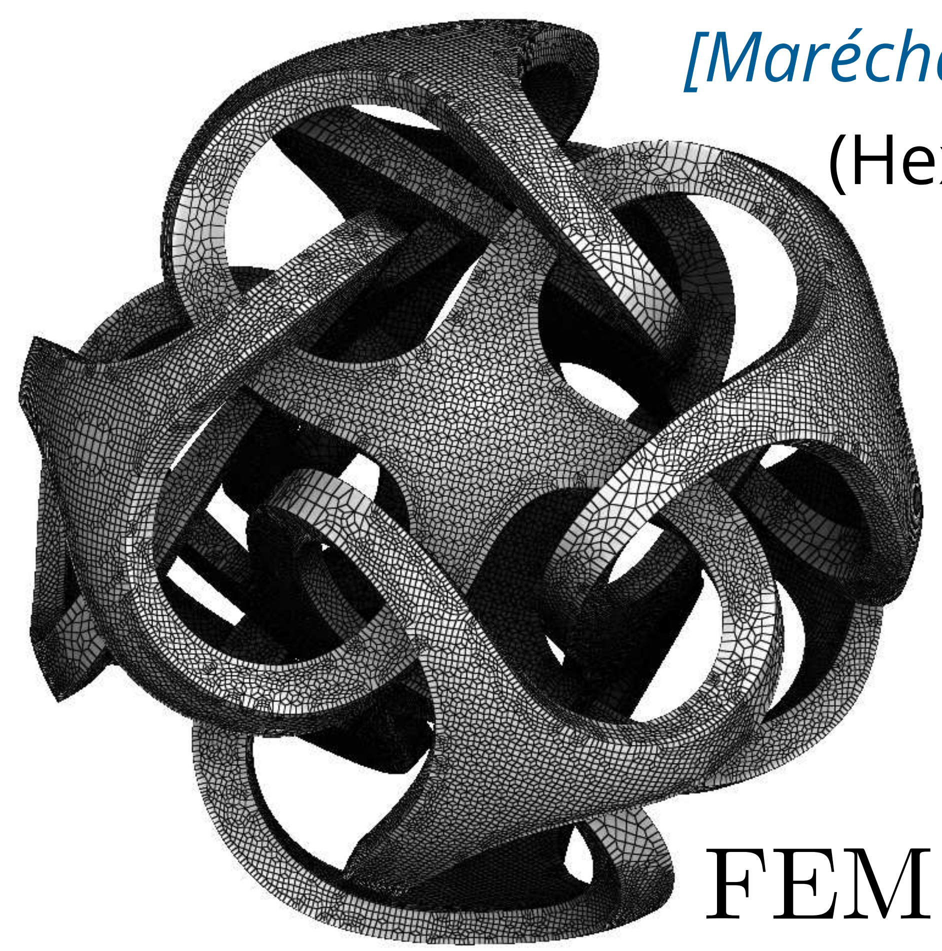
$u = 0$ (Dirichlet)

- Types de maillages :



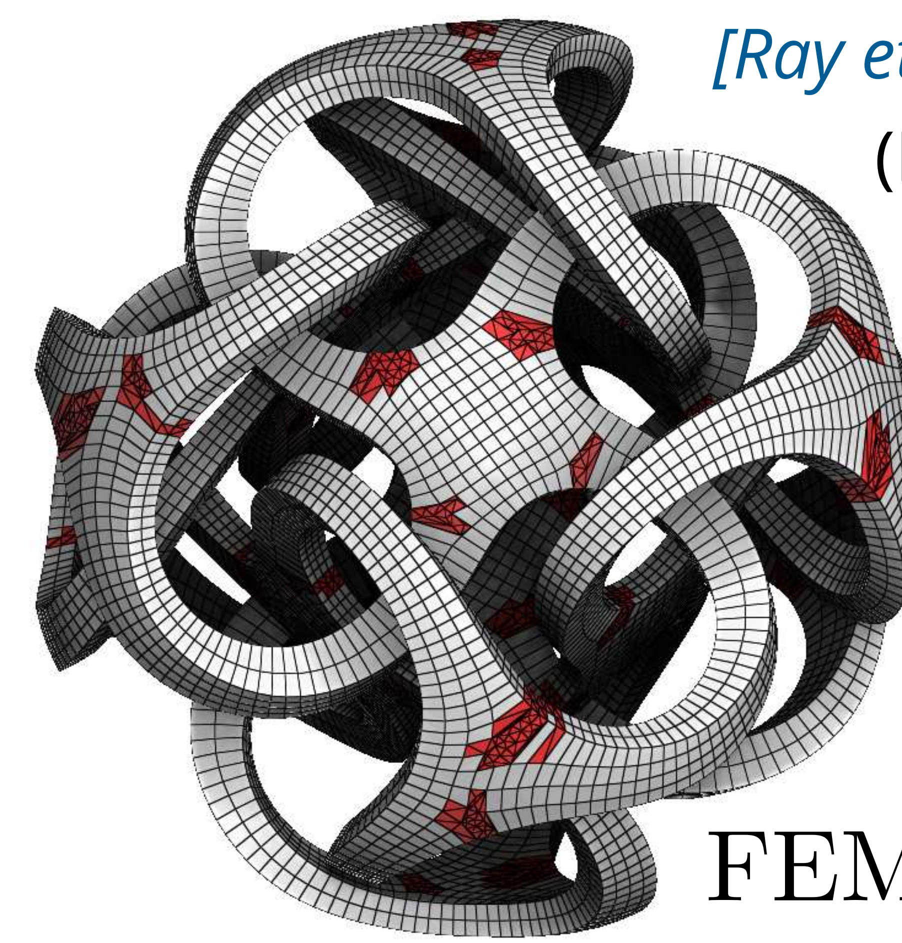
[Si '15] (TetGen)
[Dapogny et al. '14] (mmg3d)

FEM : $\mathbb{P}_k$



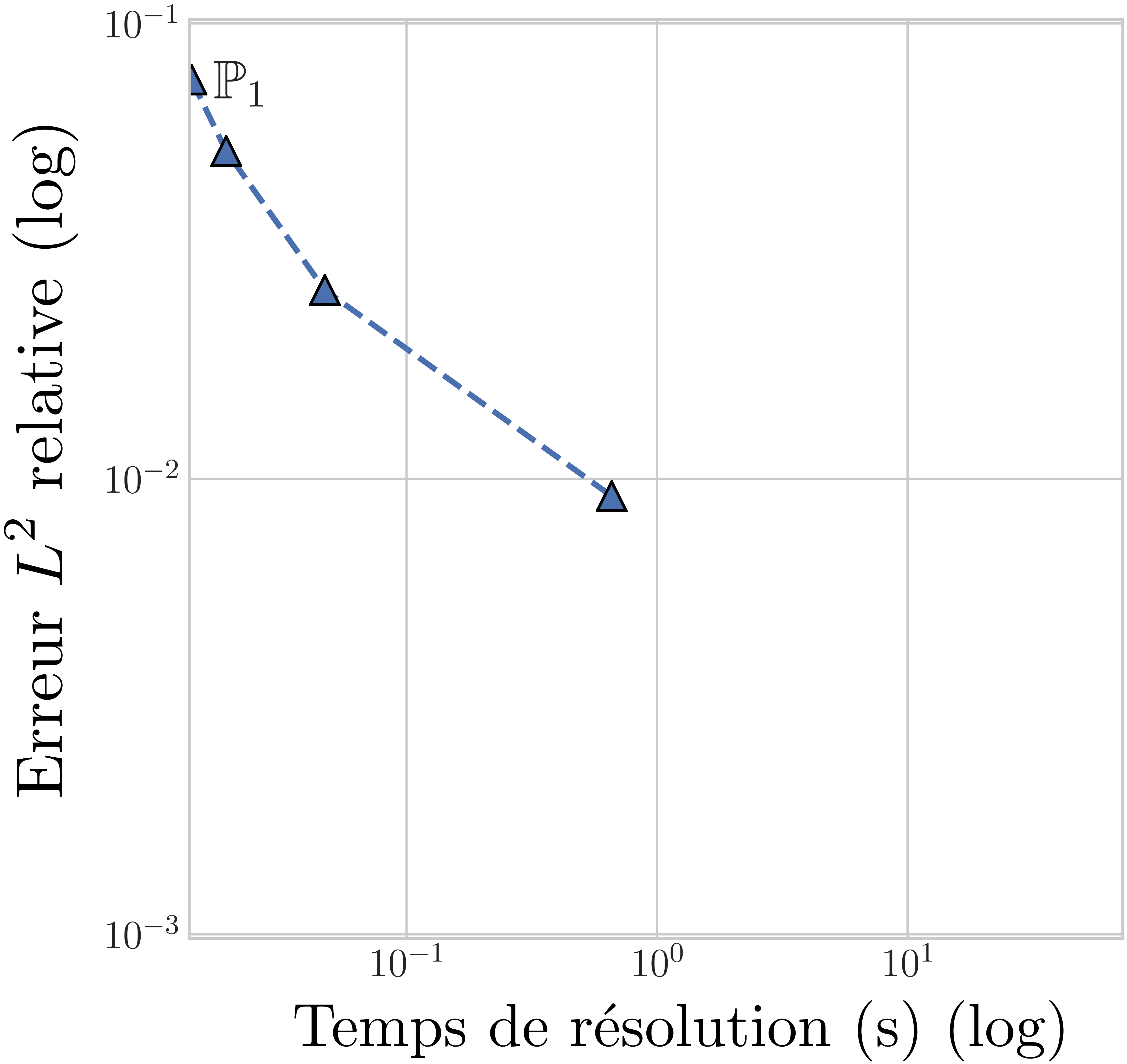
[Maréchal '09] (Hexotic)

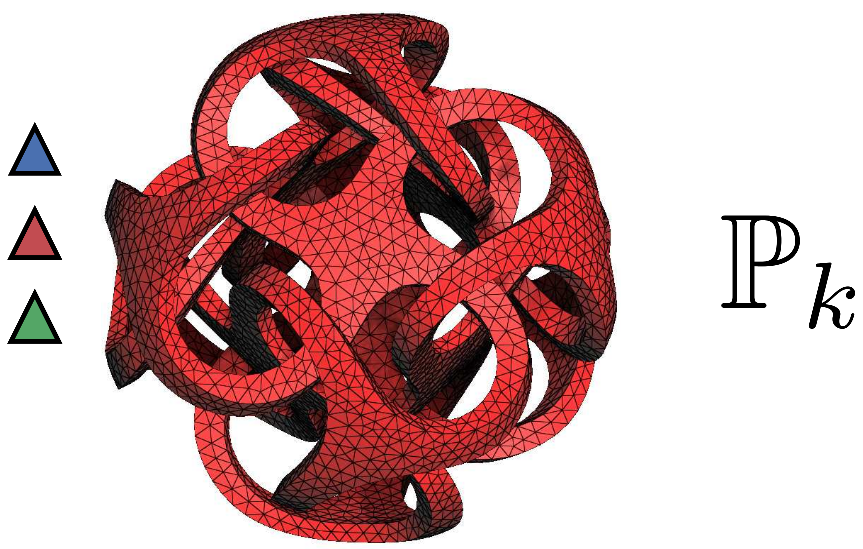
FEM : $\mathbb{Q}_k$



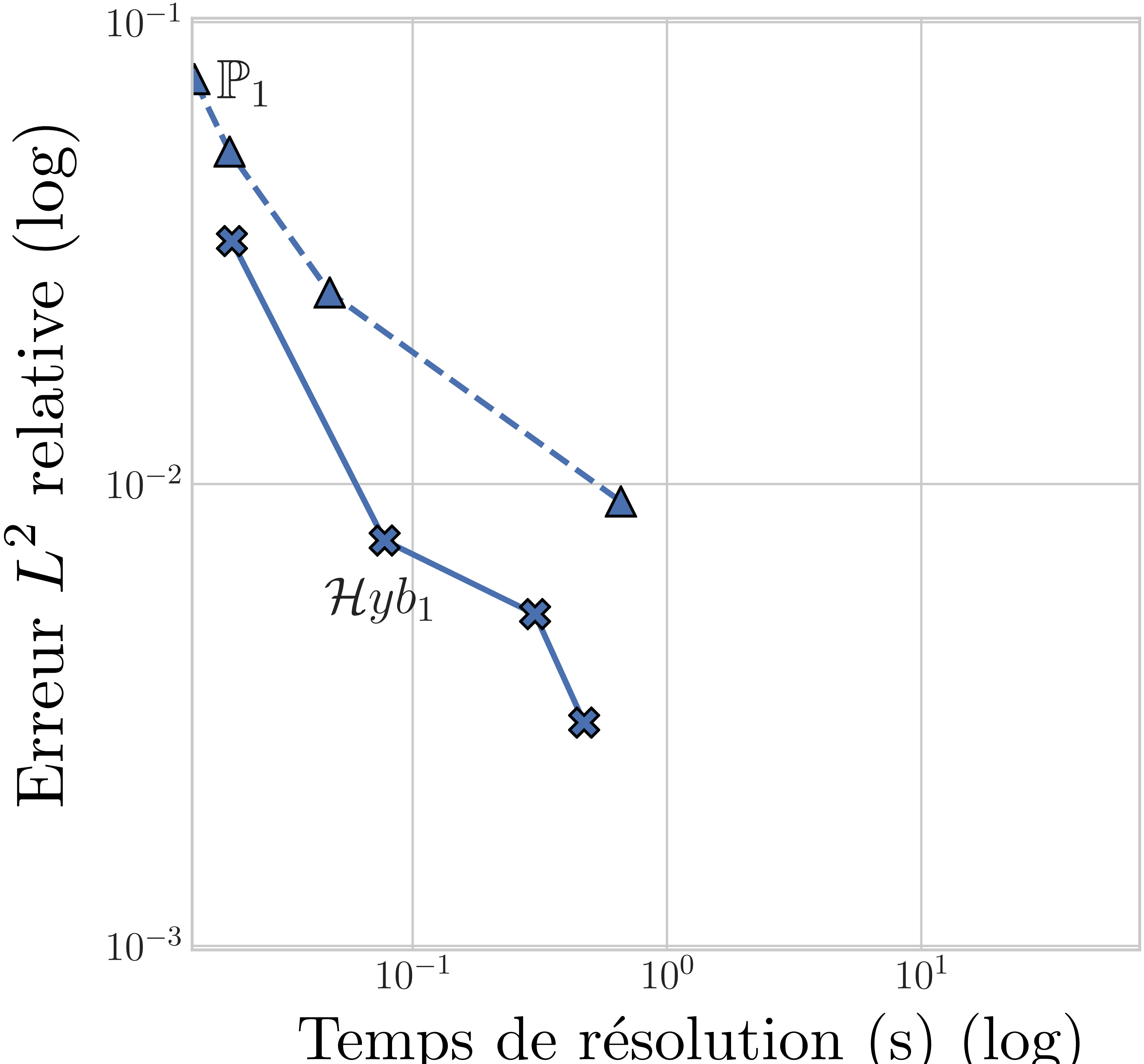
[Ray et al. '18] (Partie I)

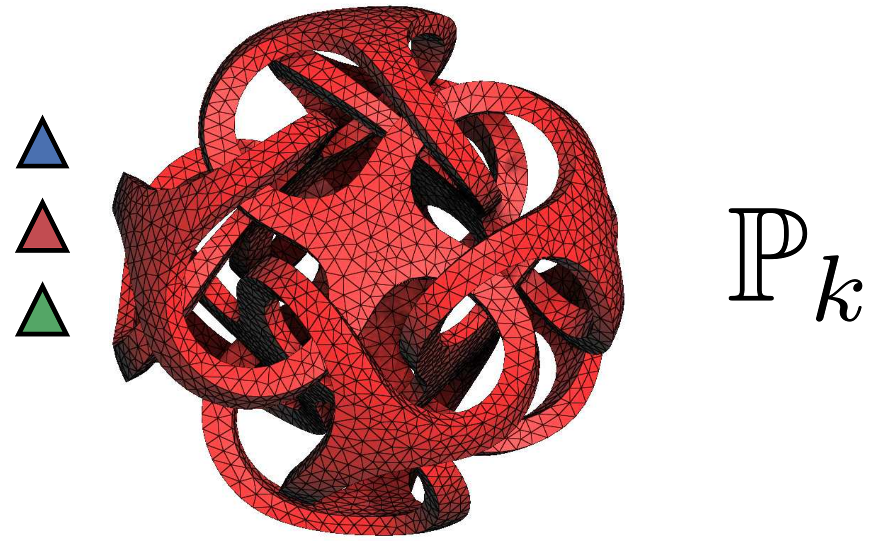
FEM : $\mathbb{H}yb_k$

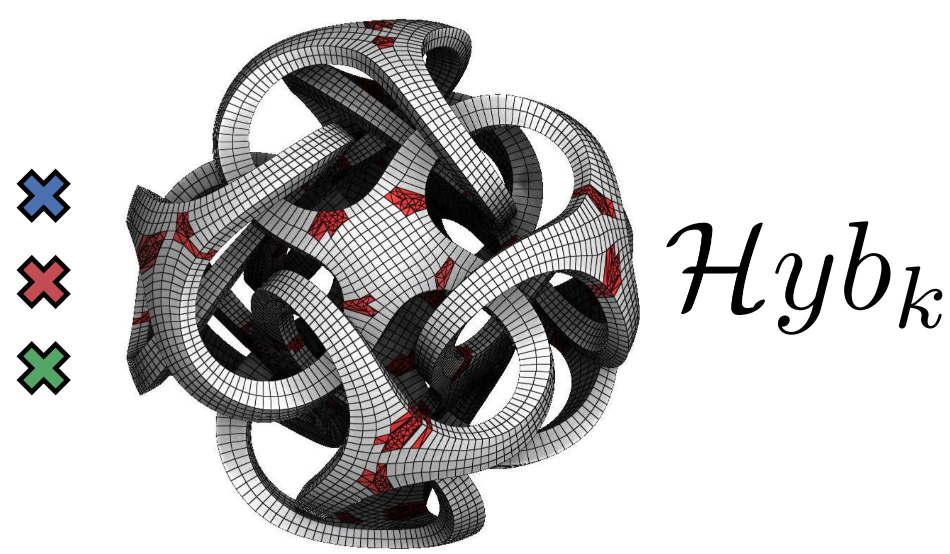




Calcul de distances :
- 72M échantillons
- référence : P4, 20M ddl

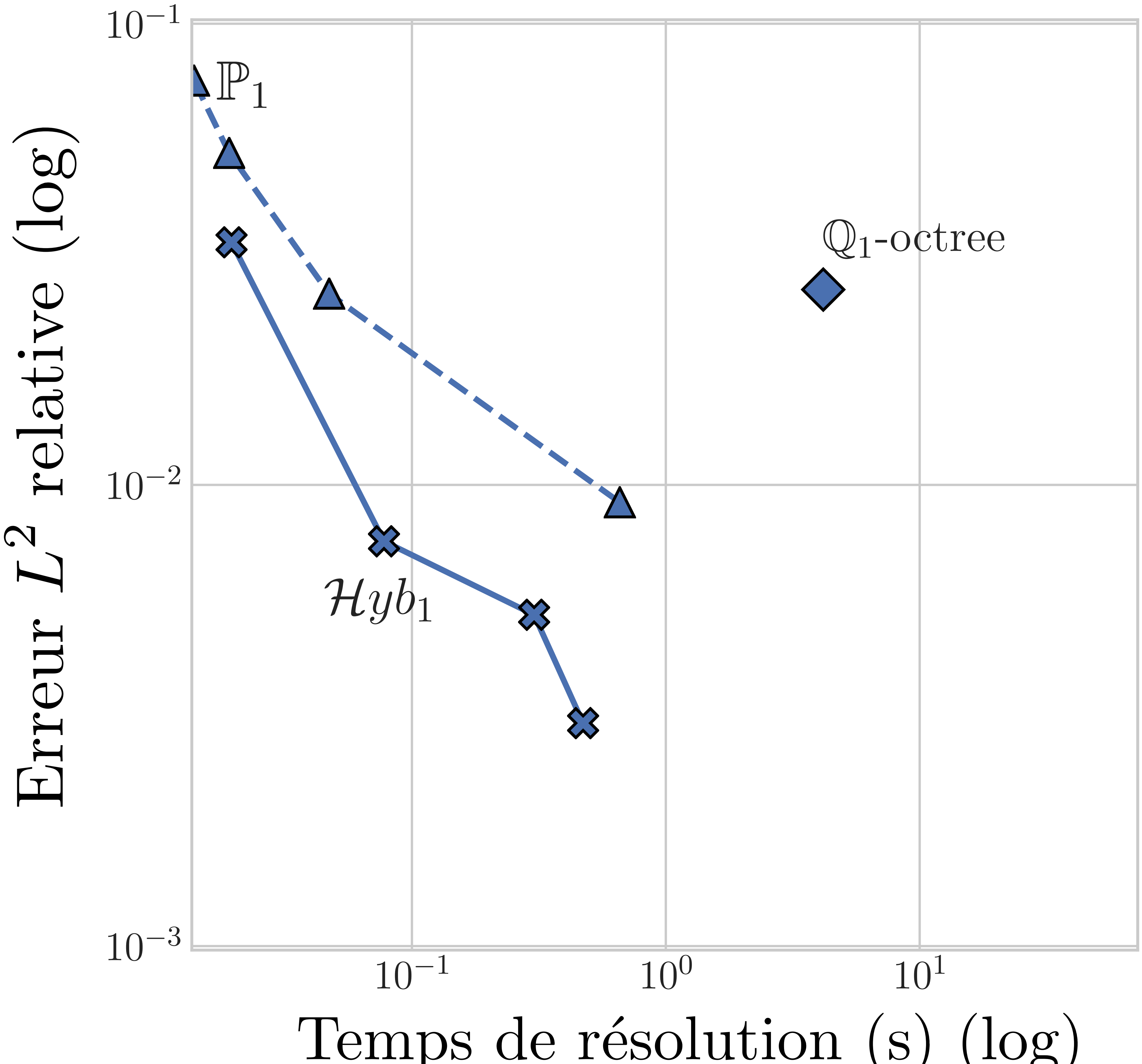


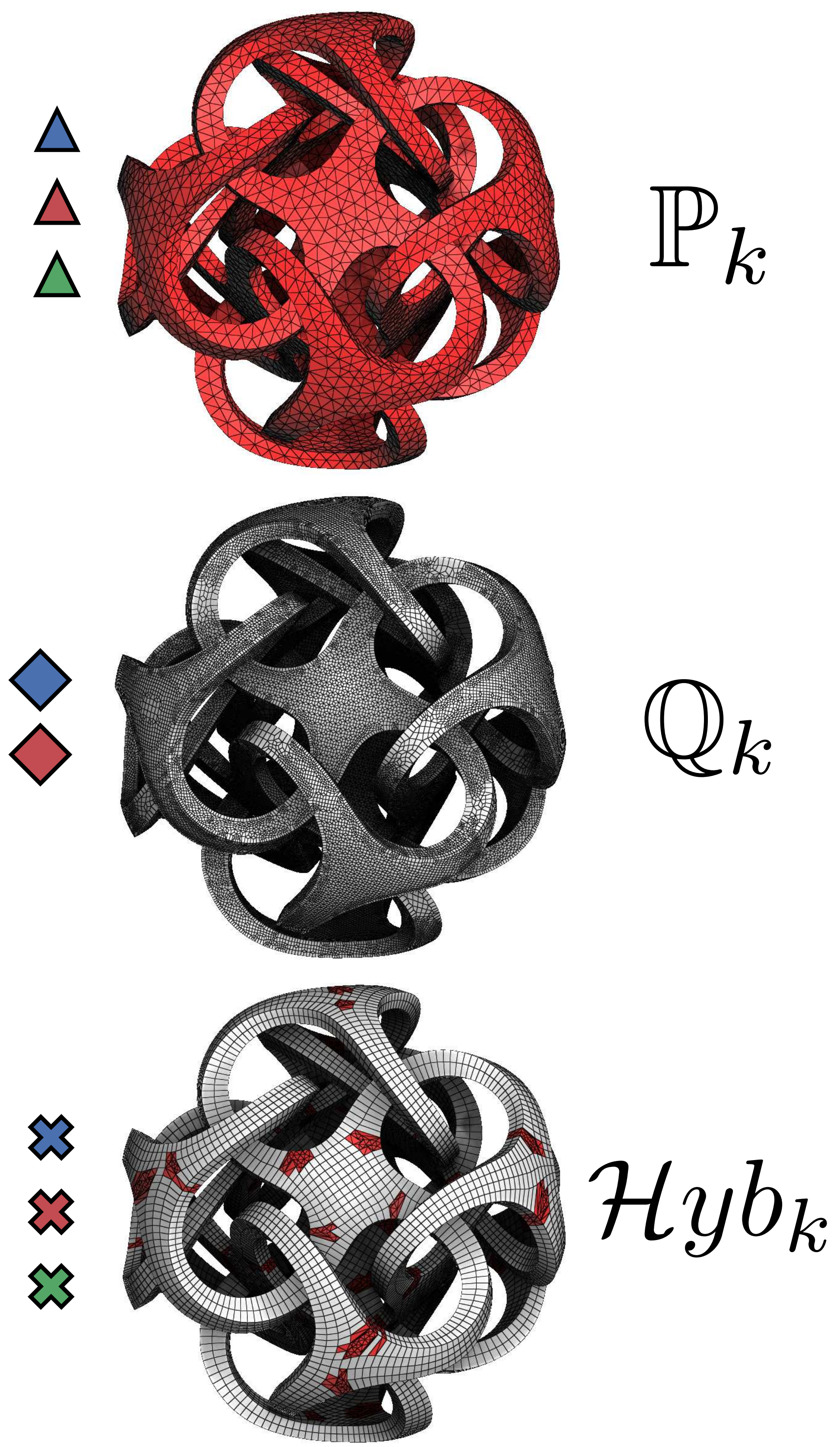




Calcul de distances :
- 72M échantillons
- référence : P4, 20M ddl

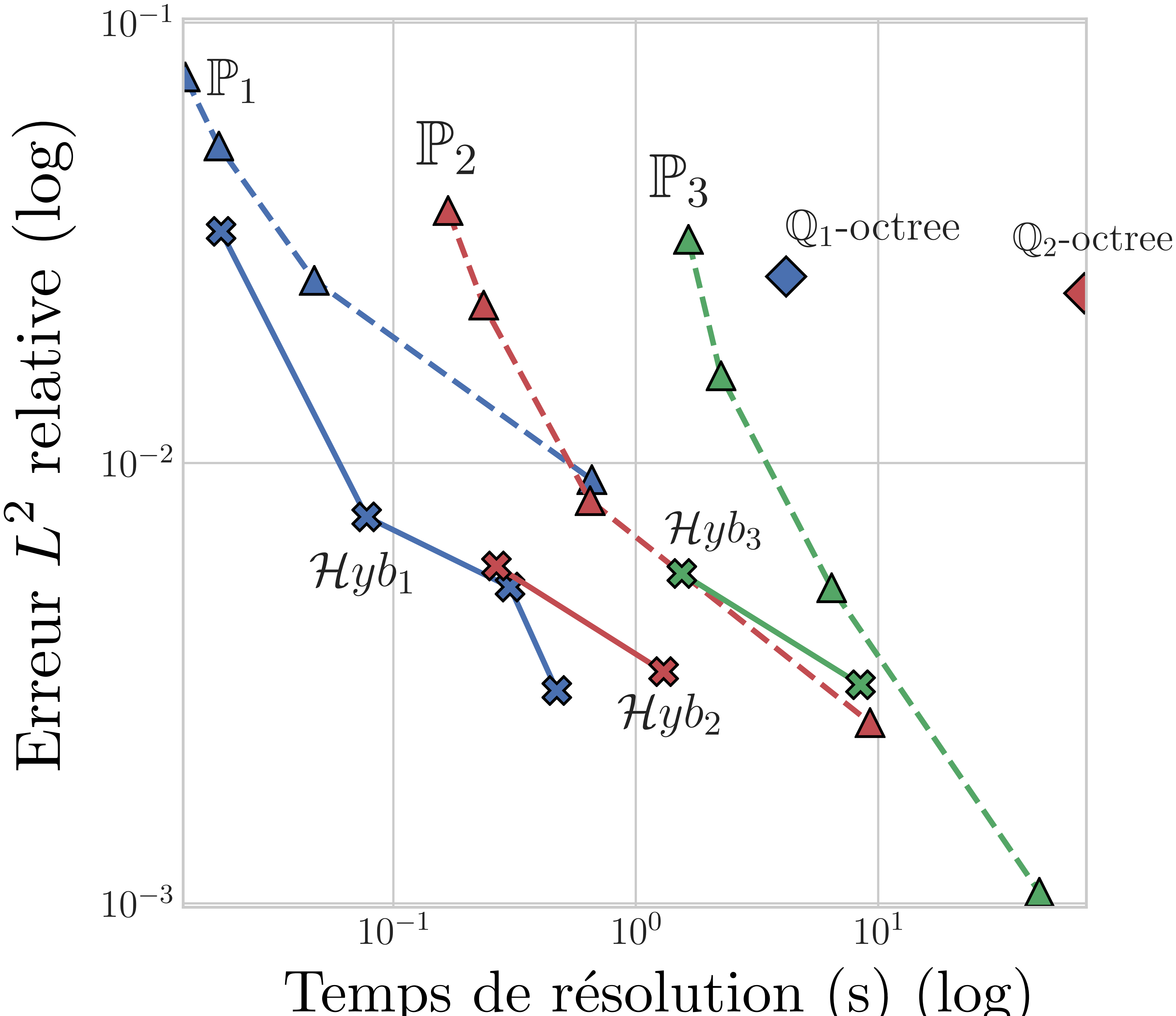
Performances sur le problème Poisson-métatron

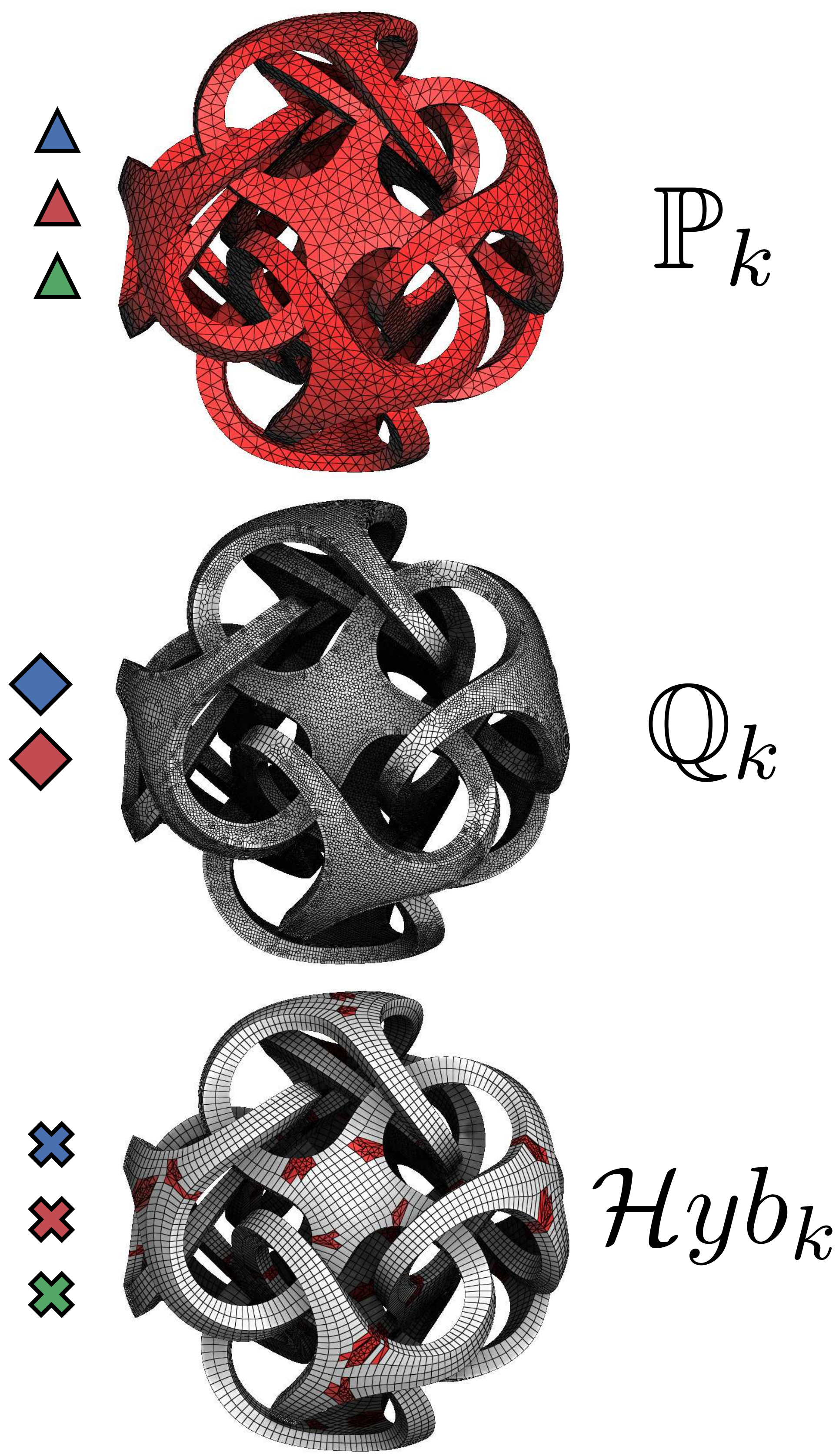




Calcul de distances :
- 72M échantillons
- référence : P4, 20M ddl

Performances sur le problème Poisson-métatron



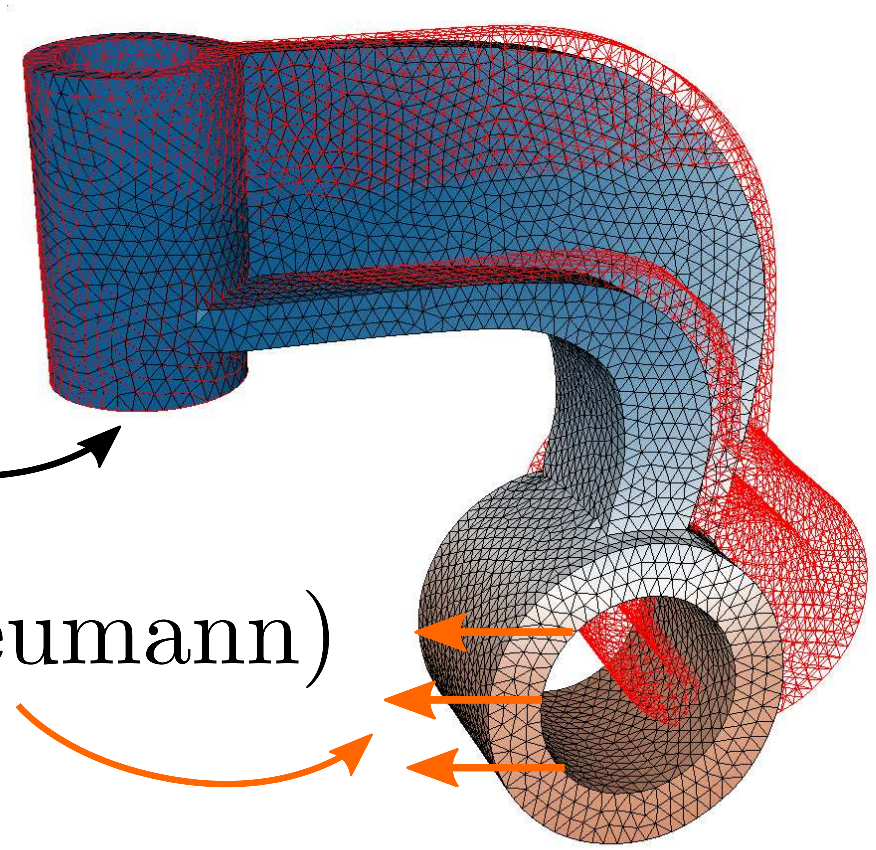


Calcul de distances :
- 72M échantillons
- référence : P4, 20M ddl

- Problème et solution :

$$u = 0 \ (\text{Dirichlet})$$

$$\sigma(u) \cdot n = g \ (\text{Neumann})$$



Équations de l'elasticité linéaire :

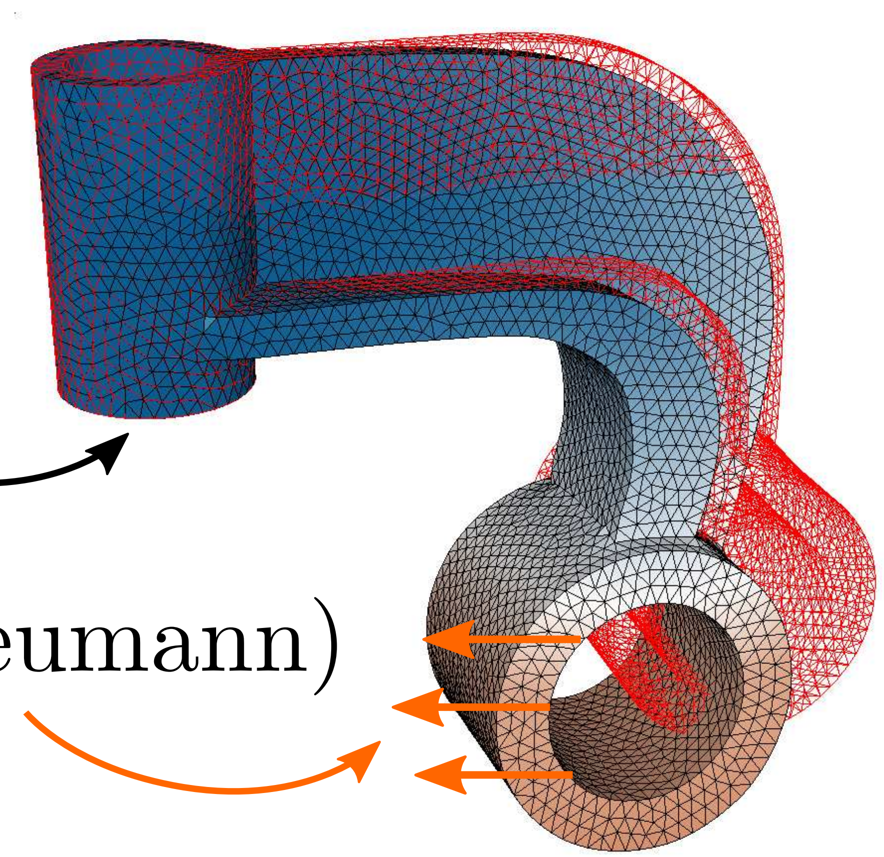
$$\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0$$

$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathcal{I} + \mu(\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u}^T)$$

- Problème et solution :

$$u = 0 \text{ (Dirichlet)}$$

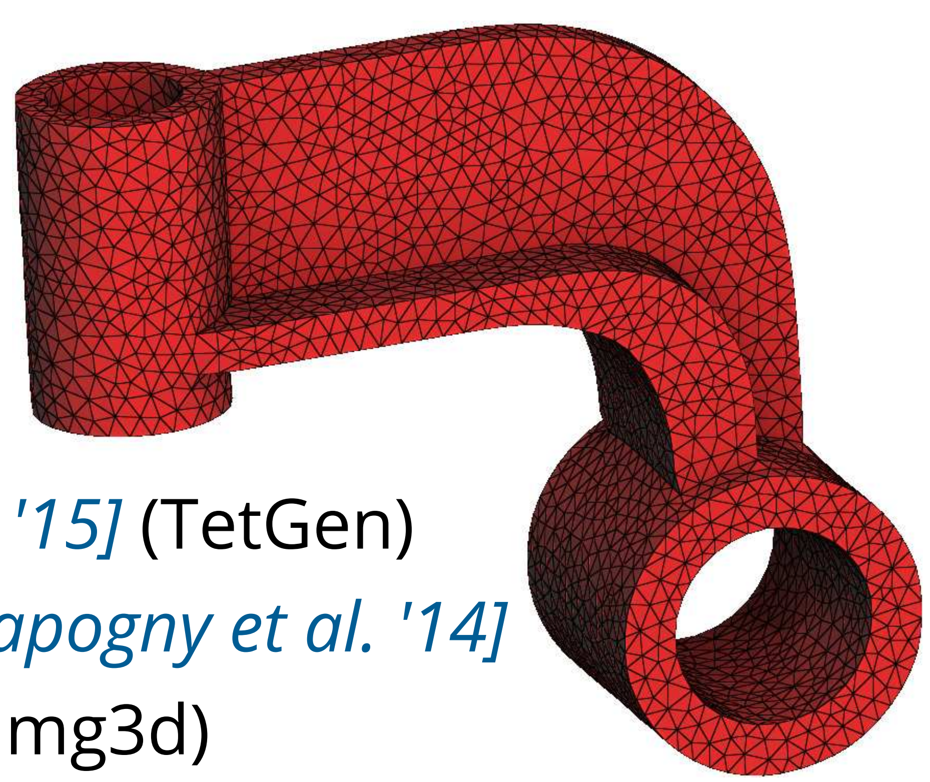
$$\sigma(u) \cdot n = g \text{ (Neumann)}$$



Équations de l'elasticité linéaire :

$$\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0$$
$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathcal{I} + \mu(\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u}^T)$$

- Types de maillages :



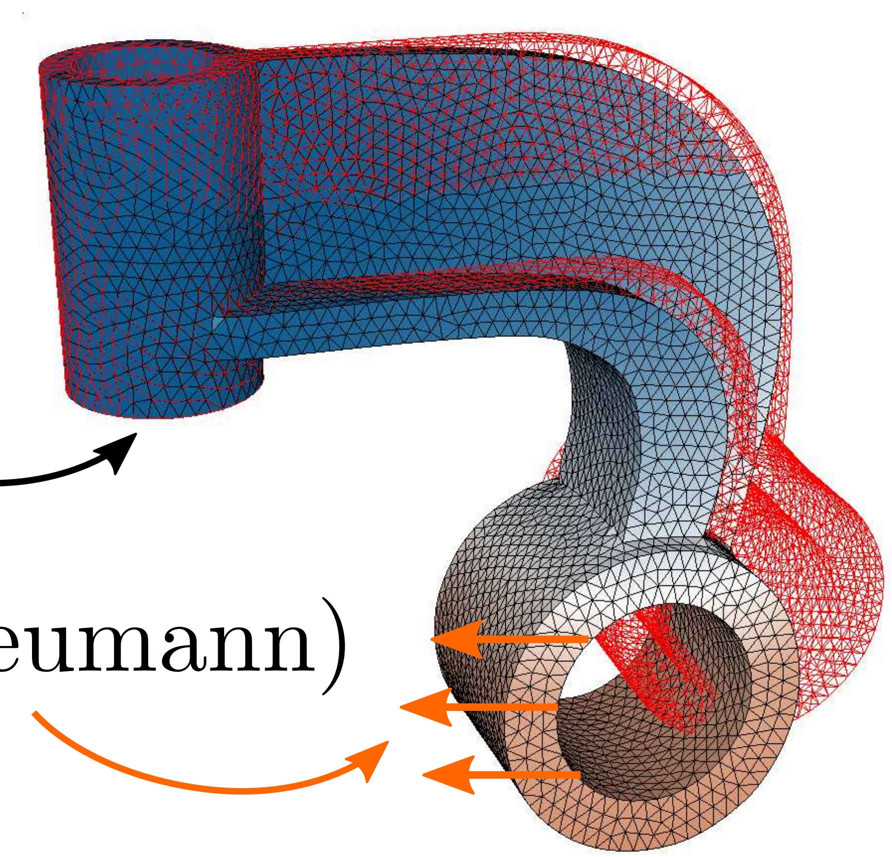
[Si '15] (TetGen)
[Dapogny et al. '14] (mmg3d)

$$\text{FEM} : \mathbb{P}_k$$

- Problème et solution :

$$u = 0 \ (\text{Dirichlet})$$

$$\sigma(u) \cdot n = g \ (\text{Neumann})$$

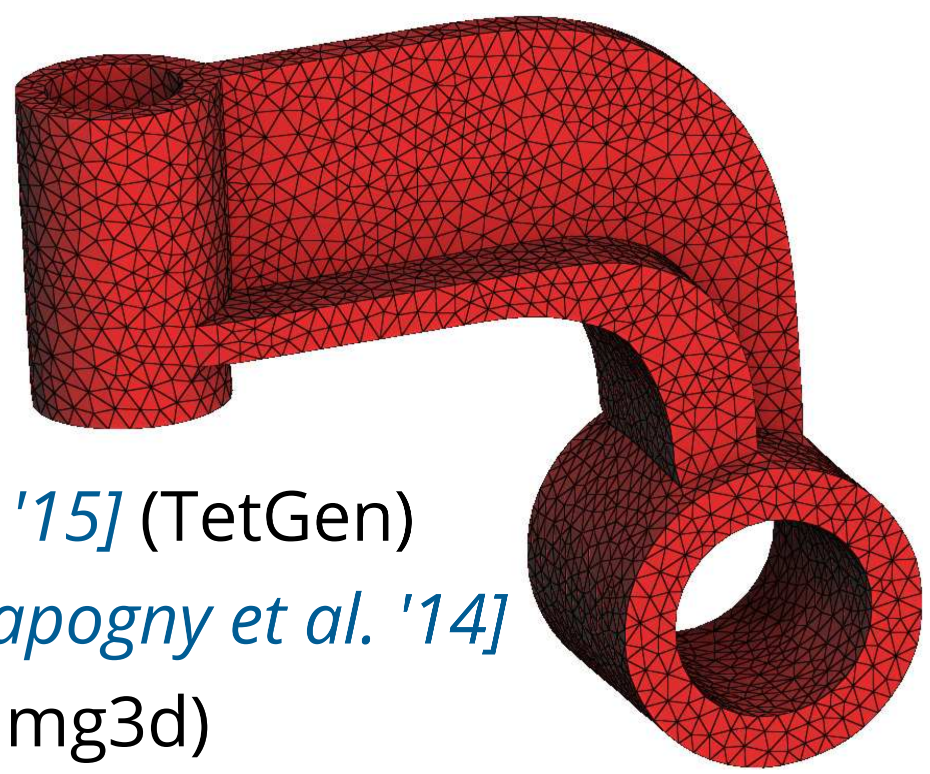


Équations de l'elasticité linéaire :

$$\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0$$

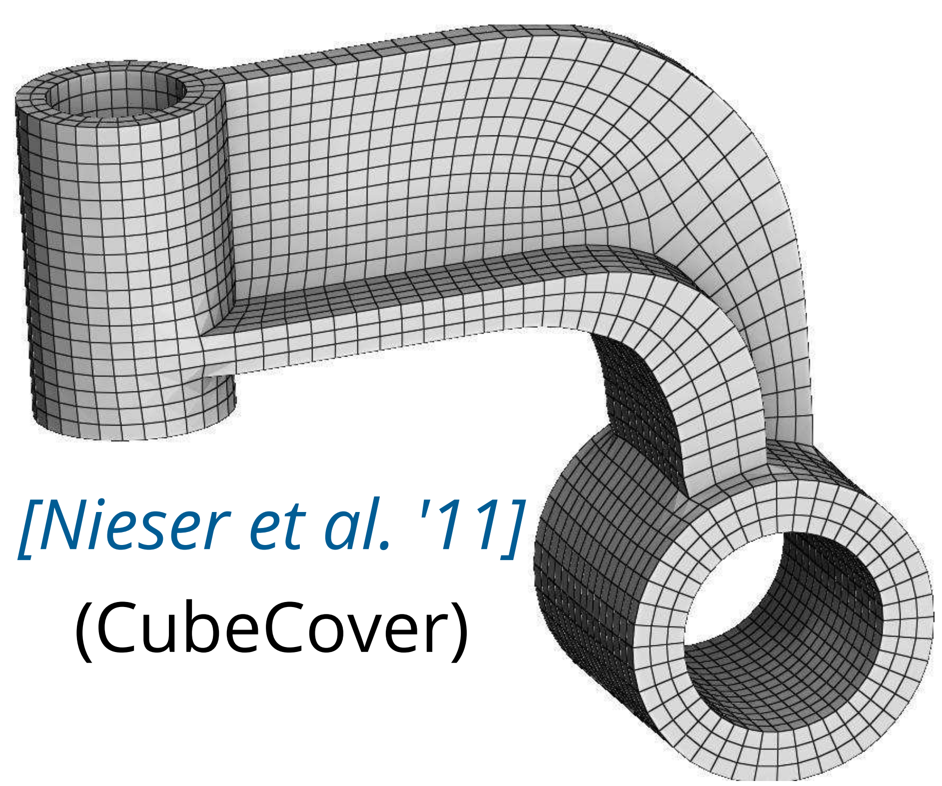
$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathcal{I} + \mu(\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u}^T)$$

- Types de maillages :



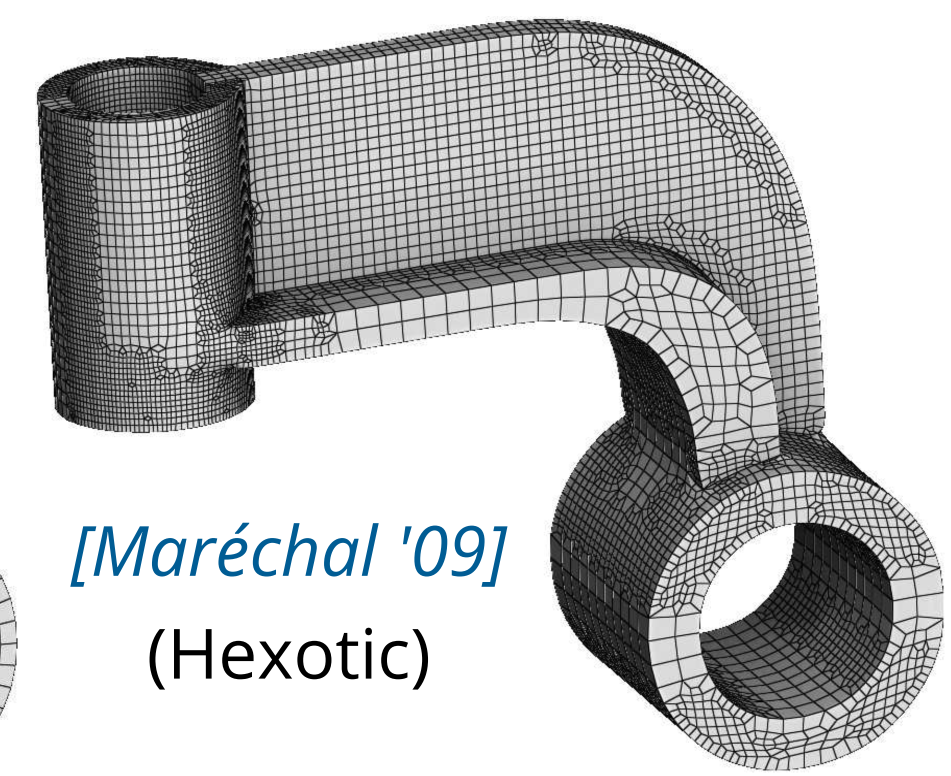
[Si '15] (TetGen)
[Dapogny et al. '14] (mmg3d)

$$\text{FEM} : \mathbb{P}_k$$



[Nieser et al. '11] (CubeCover)

$$\text{FEM} : \mathbb{Q}_k$$



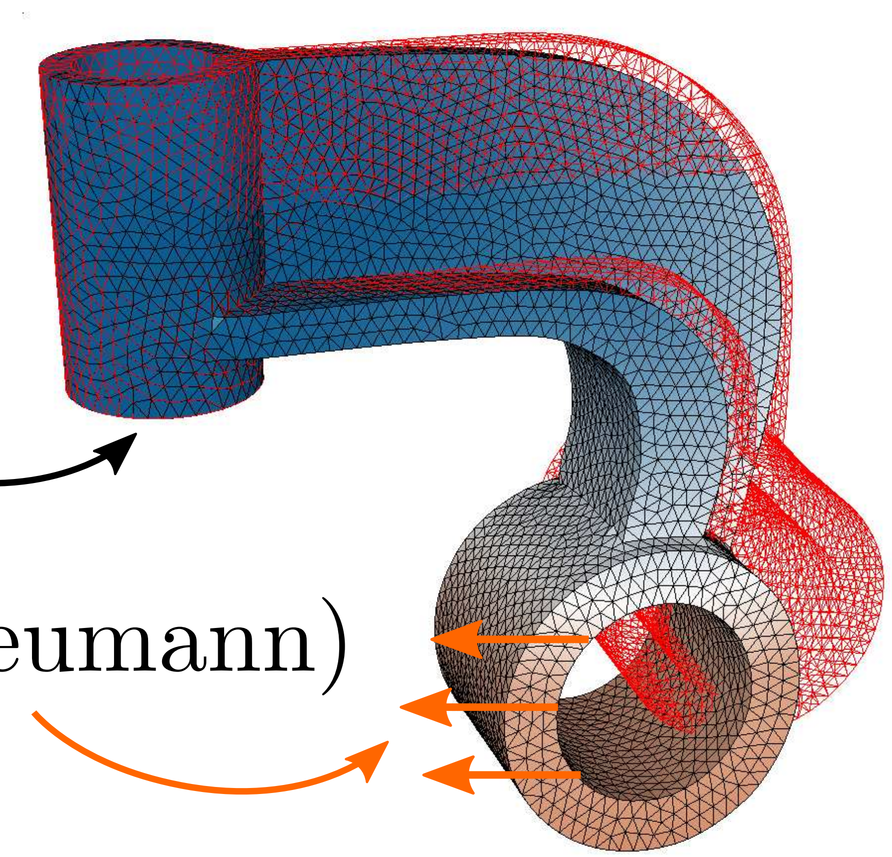
[Maréchal '09] (Hexotic)

$$\text{FEM} : \mathbb{Q}_k$$

- Problème et solution :

$u = 0$ (Dirichlet)

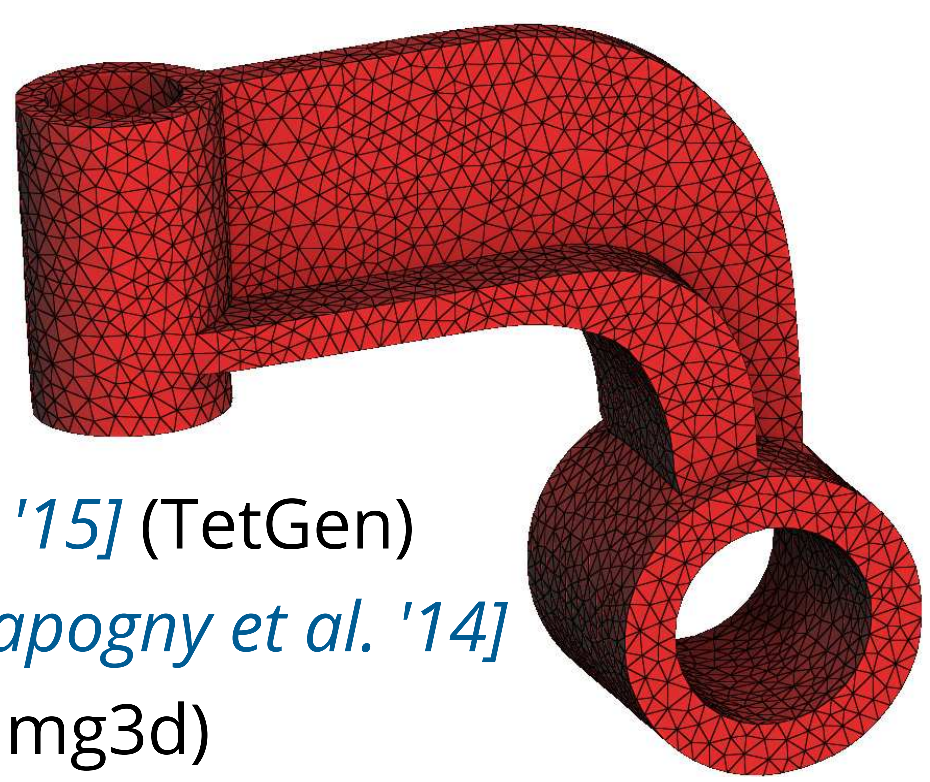
$\sigma(u) \cdot n = g$ (Neumann)



Équations de l'elasticité linéaire :

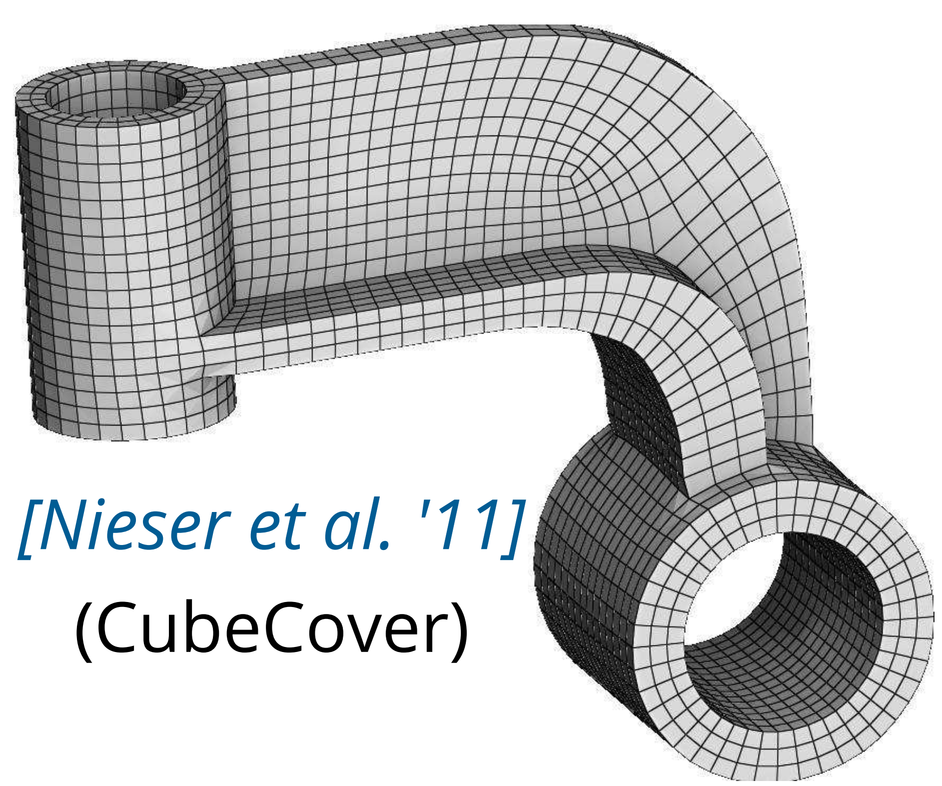
$$\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0$$
$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathcal{I} + \mu(\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u}^T)$$

- Types de maillages :



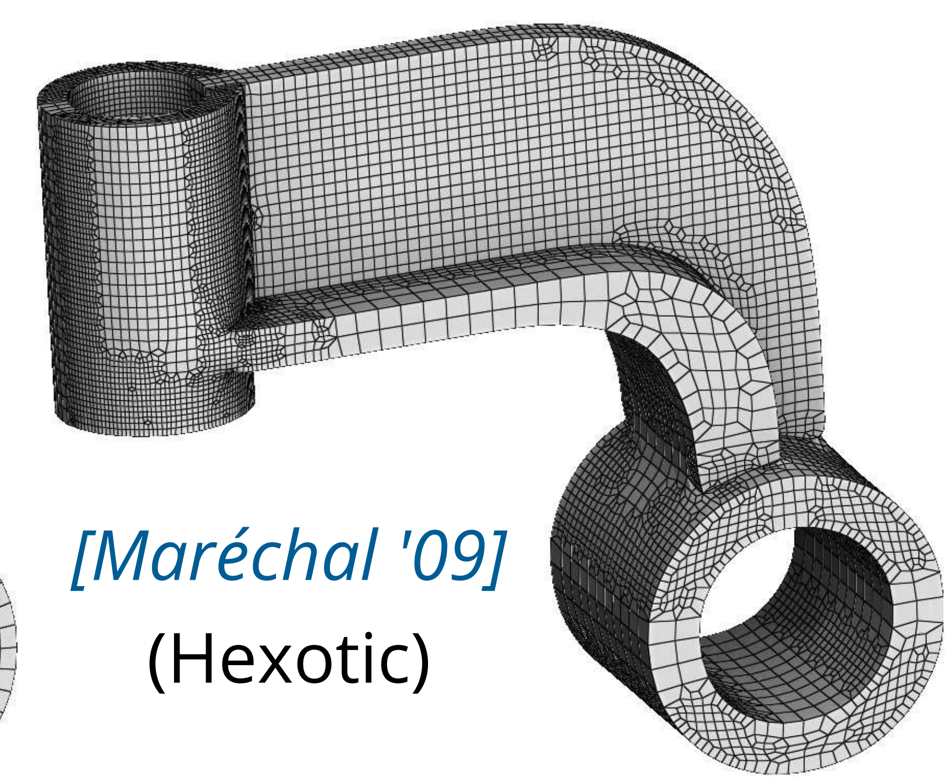
[Si '15] (TetGen)
[Dapogny et al. '14] (mmg3d)

$\text{FEM} : \mathbb{P}_k$



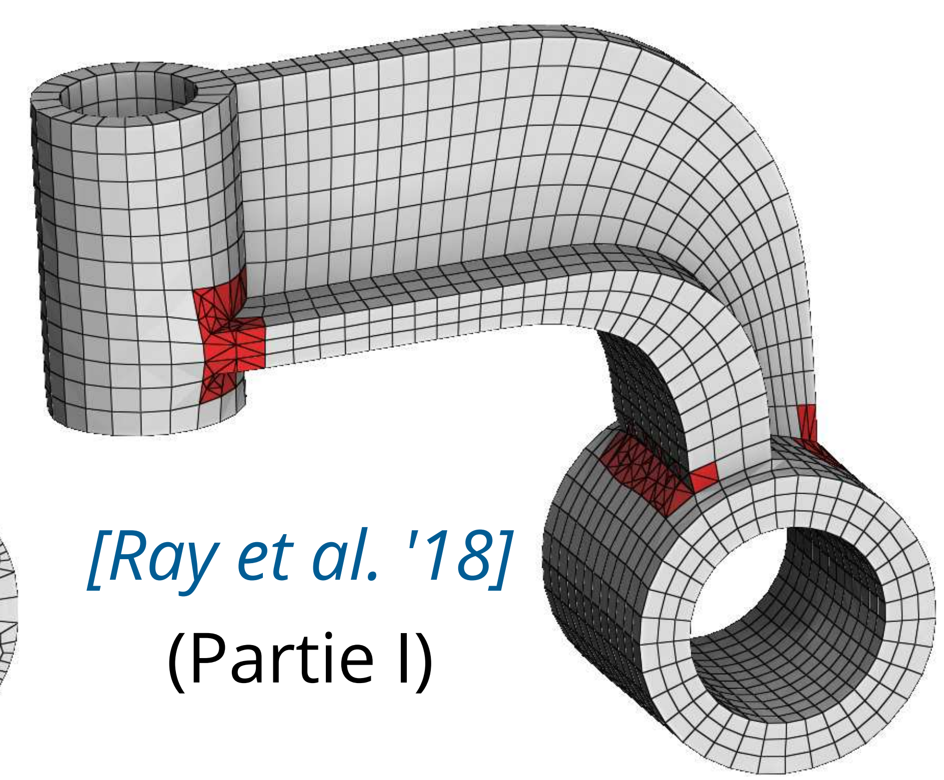
[Nieser et al. '11] (CubeCover)

$\text{FEM} : \mathbb{Q}_k$



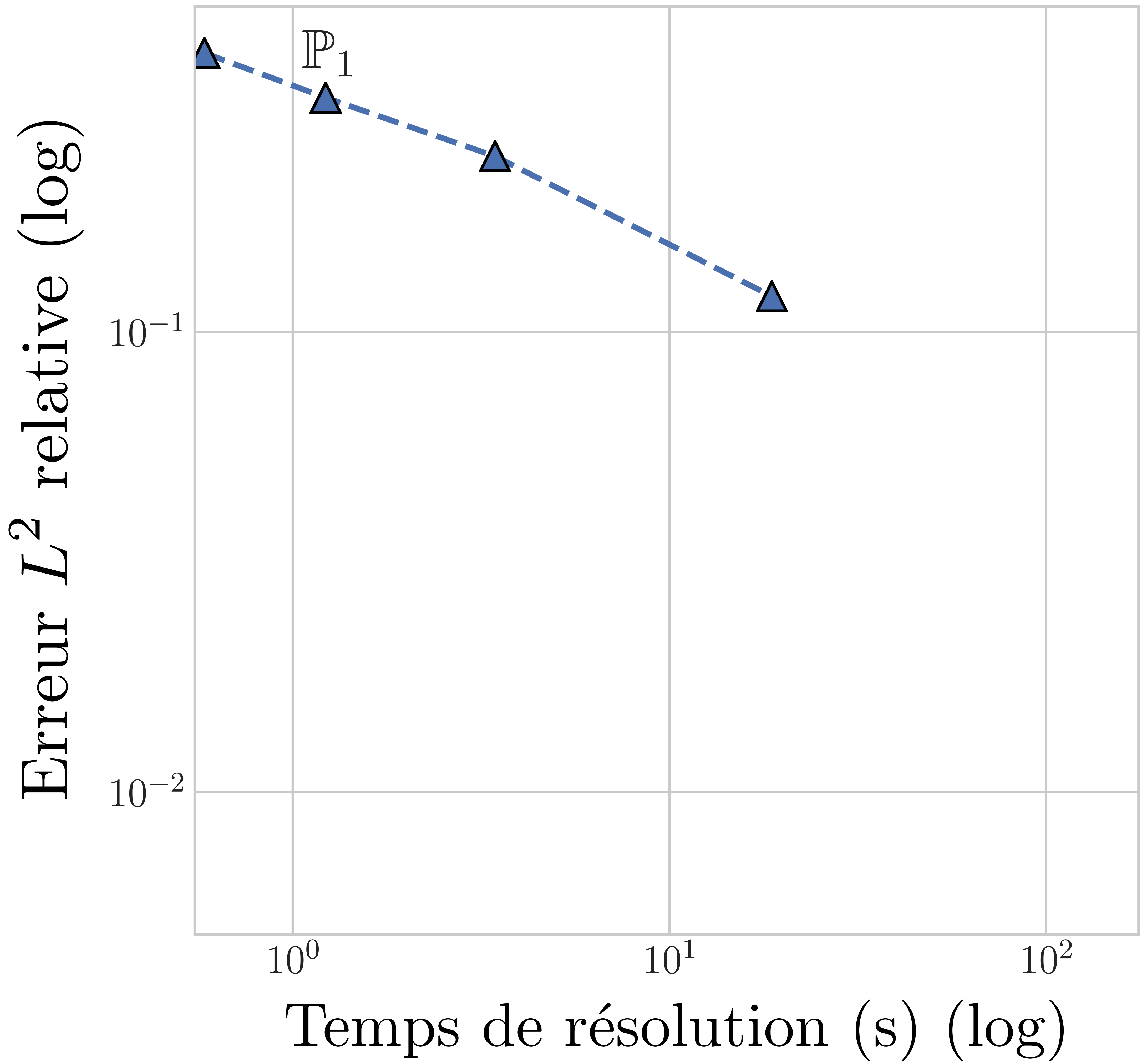
[Maréchal '09] (Hexotic)

$\text{FEM} : \mathbb{Q}_k$

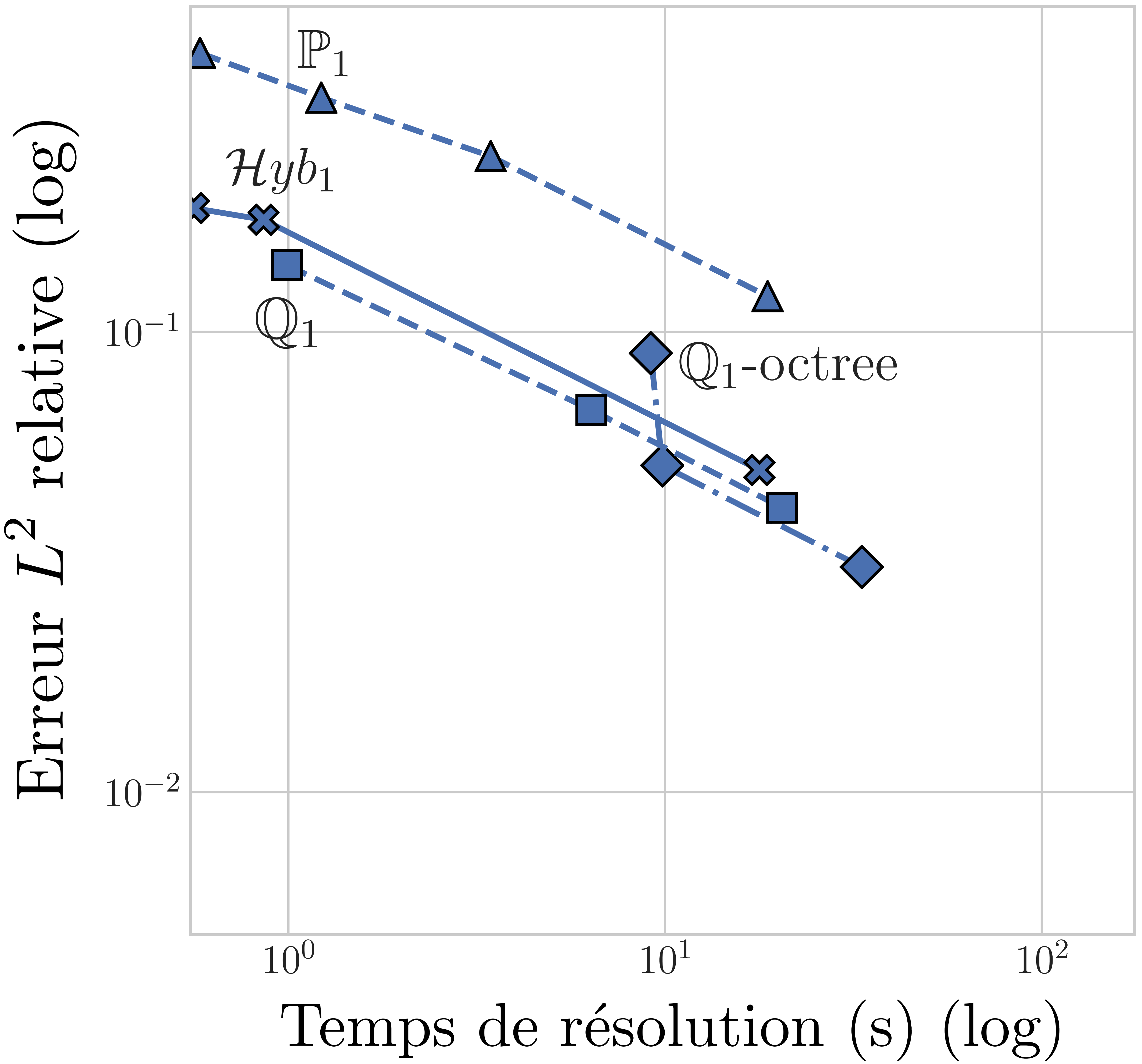


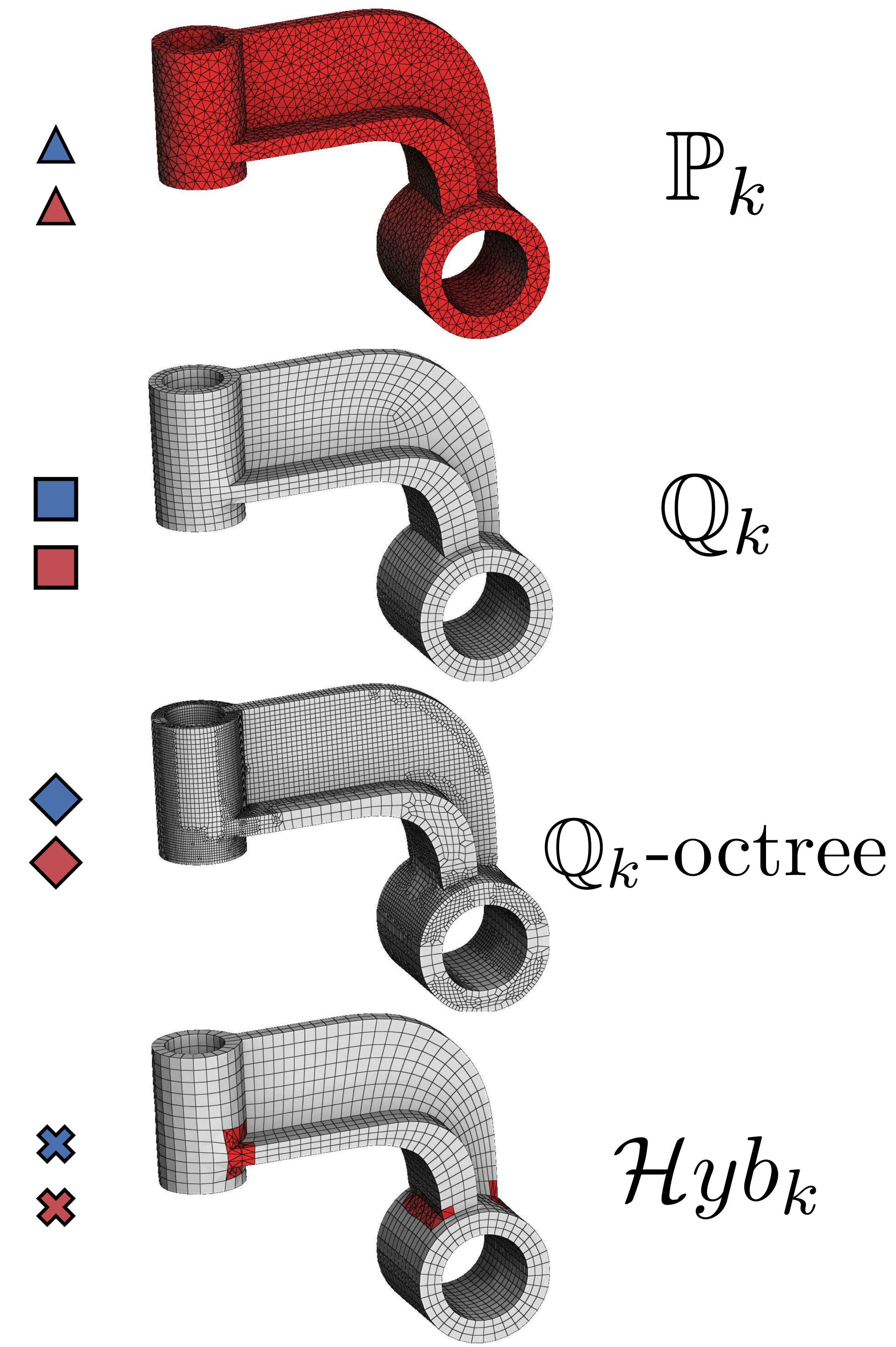
[Ray et al. '18] (Partie I)

$\text{FEM} : \mathbb{H}yb_k$



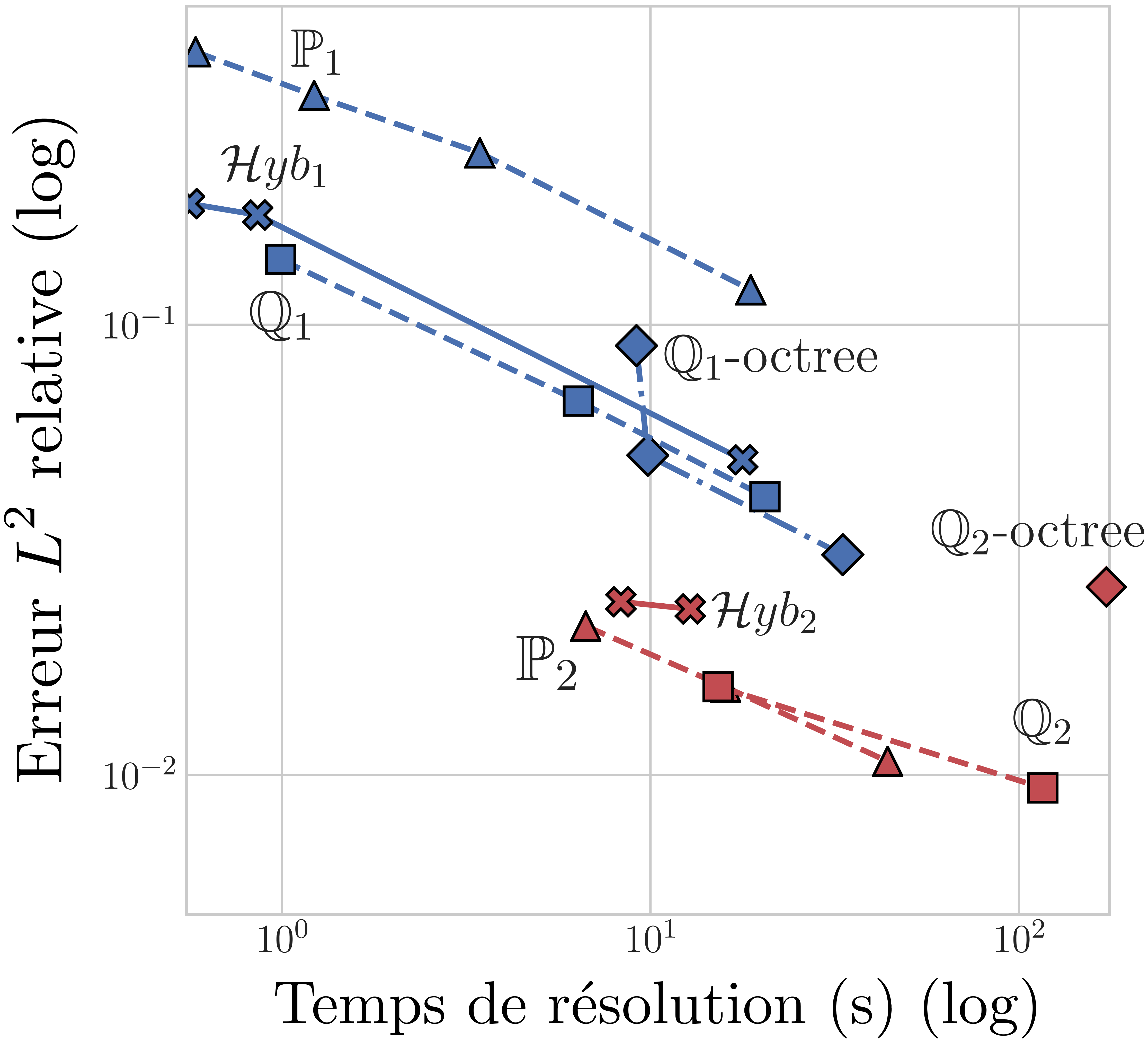
Calcul de distances :
300M échantillons, référence : P4, 141M ddl

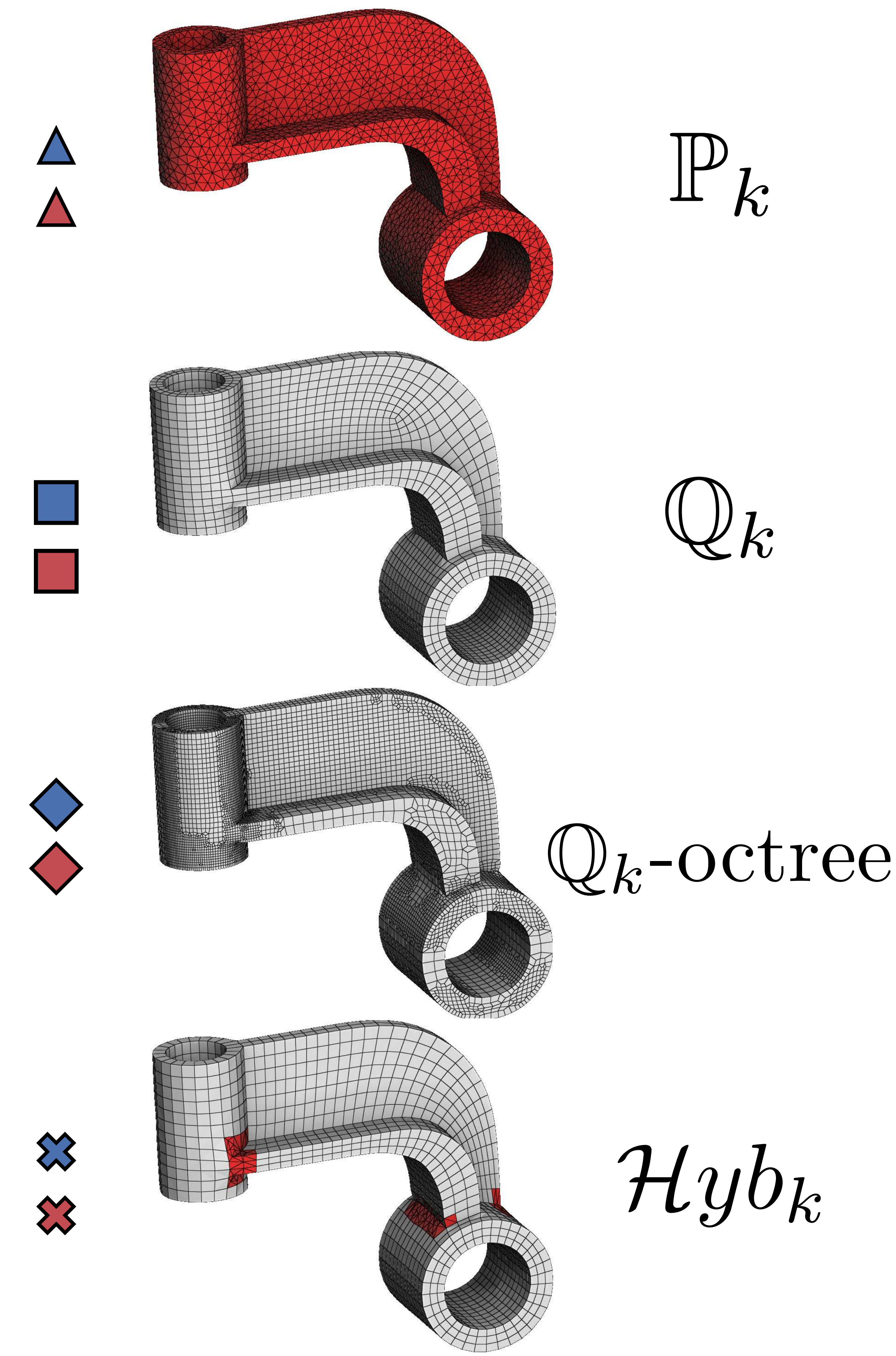




Calcul de distances :
300M échantillons, référence : P4, 141M ddl

Performances sur le problème élasticité-hanger





Calcul de distances :
300M échantillons, référence : P4, 141M ddl

Conclusion sur les comparaisons

- Essais 2D simples : résultats pas forcément conformes aux idées reçues
- FEM sur maillages hex-tet : comportement de $\mathcal{H}yb_k$ similaire à $\mathbb{Q}_k$
- Avantage limité (~20%) des hexaèdres sur les tetraèdres
  (sur problèmes simples avec solutions lisses)

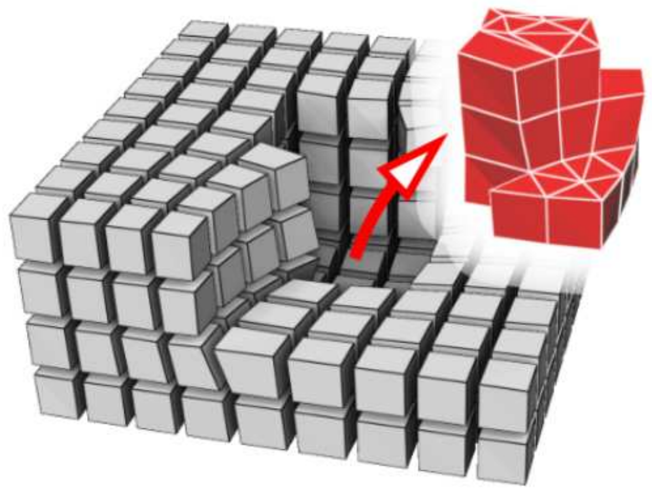
Conclusion sur les comparaisons

- Essais 2D simples : résultats pas forcément conformes aux idées reçues
- FEM sur maillages hex-tet : comportement de $\mathcal{H}yb_k$ similaire à $\mathbb{Q}_k$
- Avantage limité (~20%) des hexaèdres sur les tetraèdres
  (sur problèmes simples avec solutions lisses)

Perspectives :

- Comparaisons sur des équations plus difficiles (non-linéaires, non elliptiques)
- Utilisation d'hexaèdres améliorés (incompatible, hybride) en mécanique
  (cf logiciels commerciaux comme Abaqus)

Conclusions

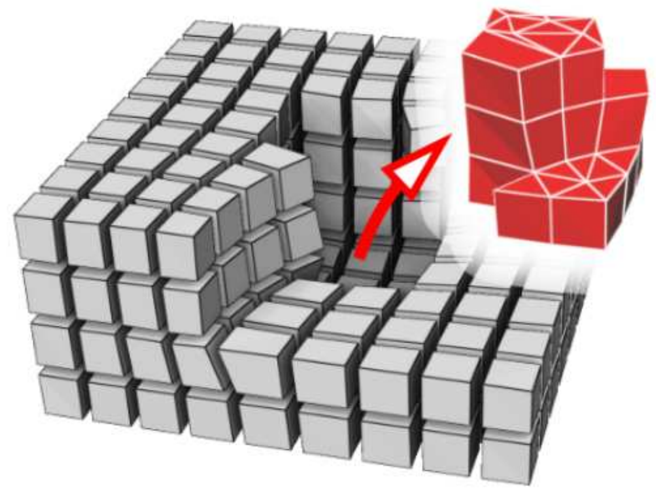


- Génération de maillage hex-dominants :

  - approche robuste *[Ray et al. '18]*, nécessaire pour appli. industrielle

  - encore beaucoup de travail avant mailleur hexaédrique automatique

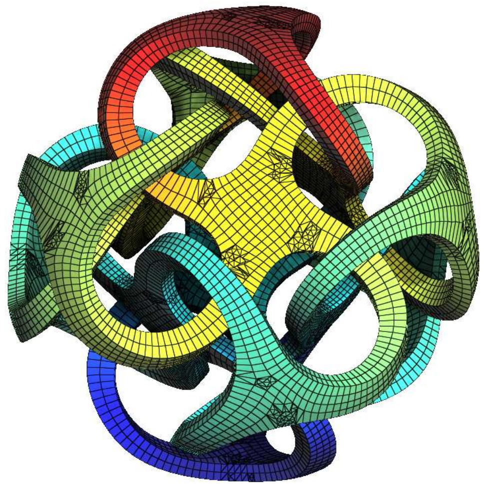
Conclusions



- Génération de maillage hex-dominants :

  - approche robuste *[Ray et al. '18]*, nécessaire pour appli. industrielle

  - encore beaucoup de travail avant mailleur hexaédrique automatique



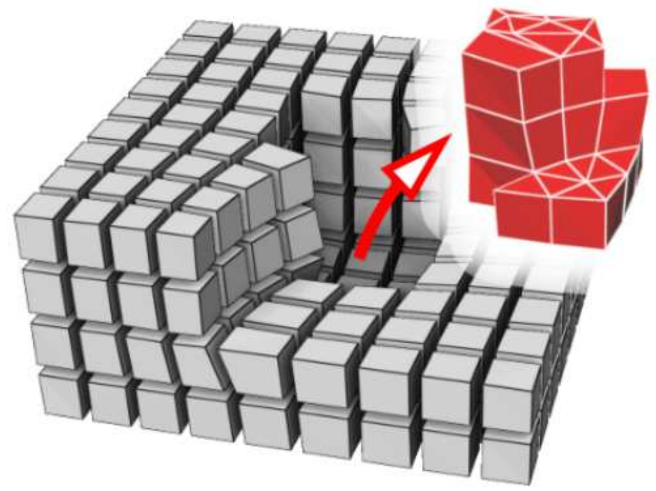
- Méthode des éléments finis sur maillages hex-dominants :

  - espace continu *[Reberol et Lévy '16]* pour maillages hex-tet, mais peu pratique

  - pratique et théorie sur les pyramides suffisamment mature pour appli. industrielle

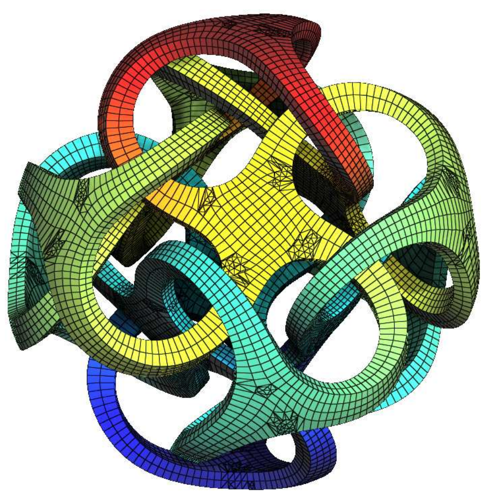
Conclusions

- Génération de maillage hex-dominants :



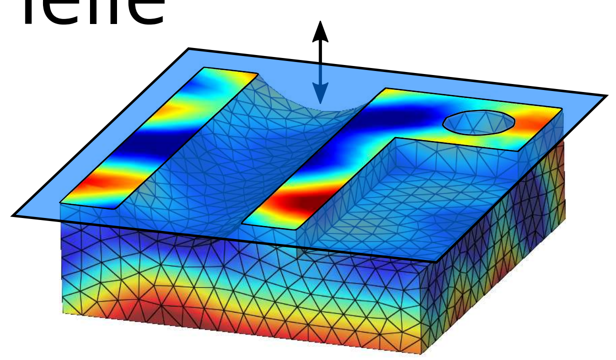
  - approche robuste *[Ray et al. '18]*, nécessaire pour appli. industrielle
  - encore beaucoup de travail avant mailleur hexaédrique automatique

- Méthode des éléments finis sur maillages hex-dominants :

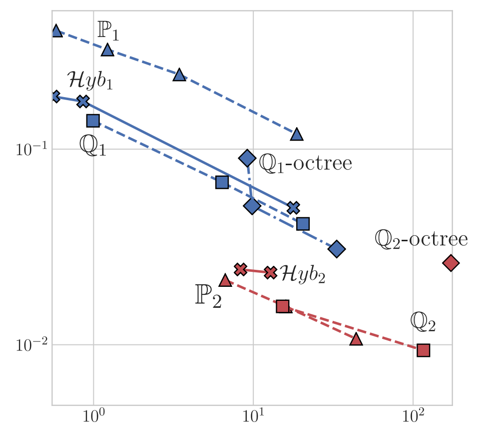


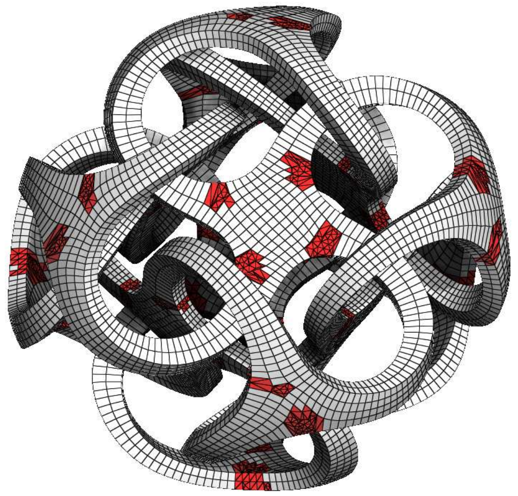
  - espace continu *[Reberol et Lévy '16]* pour maillages hex-tet, mais peu pratique
  - pratique et théorie sur les pyramides suffisamment mature pour appli. industrielle

- Évaluation des maillages hexaédriques et hex-dominants :

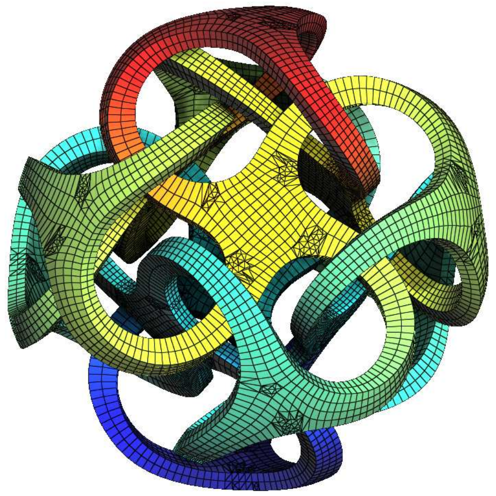


  - nouvelle méthode efficace de comparaisons de solutions éléments finis *[Reberol et Lévy '18]*
  - intérêt limité des hexaèdres pour équations simples avec solutions lisses
  - reste à étudier des problèmes plus compliqués





Merci pour votre attention



Publications :

- **Reberol M.** et Lévy B., *Low-order continuous finite element spaces on hybrid non-conforming hexahedral-tetrahedral meshes*, Rapport de recherche, 2016

- **Reberol M.** et Lévy B., *Computing the Distance between Two Finite Element Solutions Defined on Different 3D Meshes on a GPU*, SIAM Journal on Scientific Computing, 2018

- Ray N., Sokolov D., **Reberol M.**, Ledoux F. et Lévy B., *Hexahedral Meshing: Mind the Gap!*, en cours d'examen (SPM '18), 2018

Logiciel open source :

- Fast Finite Element Sampling for distance computations
  https://github.com/mxncr/FFES, 2018

Références

George et al. '90, Fully automatic mesh generator for 3D domains of any shape
Si '15, TetGen a Delaunay-Based Quality Tetrahedral Mesh Generator
Frey et George '08, Mesh Generation: Application to Finite Elements
Dapogny et al. '14, Three-dimensional adaptive domain remeshing, implicit domain meshing ...
Tautges et al. '96, The whisker weaving algorithm
Owen '98, A survey of unstructured mesh generation technology
Nieser et al. '11, CubeCover Parameterization of 3D Volumes
Ray et al. '08, N-symmetry direction field design
Huang et al. '11, Boundary aligned smooth 3D cross-frame field
Kowalski '13, PhD thesis, Boundary aligned smooth 3D cross-frame field
Lyon et al. '16, HexEx
Bedrosian '92, Shape functions and integration formulas for three-dimensional finite element analysis
Bergot et al. '09, Higher-order Finite Elements for Hybrid Meshes Using New Nodal Pyramidal Elements
Nigam et al. '11, High-order conforming finite elements on pyramids
Fuentes et al. '15, Orientation embedded high order shape functions for the exact sequence elements of all shapes
Wieners '97, Conforming discretizations on tetrahedrons, pyramids, prisms and hexahedrons
Ainsworth et al. '16, Bernstein-Bézier finite elements on tetrahedral–hexahedral–pyramidal partitions
Durochat et al. '13, PhD thesis, High order non-conforming multi-element discontinuous Galerkin method for ...
Roache '02, Code Verification by the Method of Manufactured Solutions
Farrell et al. '09, Conservative interpolation between unstructured meshes via supermesh construction
Akio et Koide '91, An efficient method of triangulating equivalued surfaces by using tetrahedral cells
Cook et al. '02, Concepts and applications of finite element analysis
Orszag '80, Spectral methods for problems in complex geometries

Références

Remacle et al. '16, GPU accelerated spectral finite elements on all-hex meshes
Pian et Tong '86, Relations between incompatible displacement model and hybrid stress model
Turek et al. '99, Proposal for Sparse Banded Blas techniques
Turek et al. '06, Hardware-oriented numerics and concepts for PDE software
Maréchal '09, Advances in Octree-Bassd All-Hexahedral Mesh Generation : Handling Sharp Features
Plimpton et al. '98, A Parallel Rendez-vous Algorithm for Interpolation Between Multiple Grids
Jiao et Heath '04, Common-refinement-based data transfer between non-matching meshes in multiphysics simus
Dewhirst et al. '93, Joining tetrahedra to hexahedra
Marais et al. '08, Conforming arbitrary order hexahedral/tetrahedral hybrid discretisation
Degerfeldt et al. '06, A brick-tetrahedron finite-element interface with stable time-stepping for Maxwell’s equations